リー代数と素粒子論

竹内外史 著

裳華房

リー代数と素粒子論

イリノイ大学教授
理学博士
竹内外史著

東京 裳華房 発行

まえがき

リー代数は角運動量の例からもわかるように物理学者にはなじみの深い概念である．このためか，リー代数がリー代数として意識されることがかえって少なく，リー群と混同して考えられることが多かった．しかし，この事情は過去10年の間に大統一理論でリー代数が用いられるようになってから一変したといってよいと思う．10年前には物理学者がウェイトについて語るということはなかったように思うが，いまはその方の専門では多くの場合ウェイトが用いられている．今後この方面の進歩にしたがって，リー代数の純数学的概念と思われていたものが物理学で常用されるようになることが期待される．またリー代数の理論自身がたとえば大統一理論にさらに重力をも統一した super symmetry の理論をつくるときなどに，一層本質的に用いられることが考えられる．

この本は大統一理論に用いられるリー代数の数学的理論の入門を目的としたものである．最初の予定は大統一理論で用いられているもの全部の数学的理論と思ったのであるが，ある程度かいてみてこれは実際には不可能であること，もっと詳しくいえばそのためにはこの程度の本がもう一冊必要なことがわかって断念したものである．したがって本書は大統一理論に必要なもののちょうど準備になるところで終わっている．その代わり物理学と専門の近くない一般数学者のための大統一理論の紹介を試みた一章を付け加えた．数学と物理学との接近は近来の著しい現象であって誠に喜ぶべきことであるが，現在の段階はまだ専門の近い同志の接近であって，一般物理学者と一般数学者との距離はあまりちぢまっていないように思われる．一般数学者が物理学の常識をもつことは望ましいことであろう．

この本にのべたことは形式的な最小の体系についての形式的な計算であって物理的内容は少ないものであるが，一般数学者が物理学を勉強することが至難であることを思うとき，このような入り易い所二，三個所の理解から始めてやや見通しを得てから深入りするのが現実的な行き方と思われる．一般数学者の

この分野の理解に多少の役に立てば幸いである.

物理学に関係の深いこの系統の本では数学の定理の証明を抜かすのは避け難い誘惑である. しかし証明をとばすことは読者の自由であって, 証明のないということは読者が読みたくても読めないということになる. しかも証明のない数学の定理はなんとも貧弱な感じを与えるものである. 本書では僅かの例外を除いては証明を抜かすことをしなかった. これは私自身が証明を抜かした本を一度かいた経験からできた方針である.

ニューヨーク市立大学教授崎田文二氏には二, 三の疑念に対して書面で教えて頂いた. 矢野健太郎先生には本書の執筆をお推め頂いた. また裳華房遠藤恭平氏並びに細木周治氏には出版に際して一方ならぬ御世話になった. 以上の方々にここで厚く感謝の意を表したい.

1983 年 10 月

竹内外史

目　　次

1.　線形リー群と線形リー代数

2.　単純リー代数と半単純リー代数

3.　複素半単純線形リー代数の表現

4.　具体的な表現

5. 大 統 一 理 論

1 線形リー群と線形リー代数

§1. 線形空間

まず記号の約束をする. $\boldsymbol{C}$ は複素数全体の集合, $\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合, $\boldsymbol{Z}$ は整数全体の集合とする. $\boldsymbol{C}$ の n 個の直積を $\boldsymbol{C}^n$ で表す, $\boldsymbol{R}^n$ も同様である. $\boldsymbol{C}^n$ の元を縦ベクトルで表して次のようにかく：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{ここに} \quad a_1, \ \cdots, \ a_n \in \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{R}^n$ の元も同様に縦ベクトルで表す.

0 だけから成っている線形空間をまた 0 で表すことにする.

この本では複素線形空間と実線形空間とを考える.

V が複素線形空間とすれば次の条件がみたされる：

$$a, b \in \boldsymbol{C}, \quad v_1, \ v_2 \in V \implies av_1 + bv_2 \in V$$

もし V が実線形空間ならば, この条件は次の条件にかえられる：

$$a, b \in \boldsymbol{R}, \ v_1, v_2 \in V \implies av_1 + bv_2 \in V$$

V が複素線形空間のとき V の元 $v_1, \ \cdots, \ v_n$ が V の基底であるとは, V の任意の元 v が

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \qquad a_1, \ \cdots, \ a_n \in \boldsymbol{C}$$

の形にただ一通りに表されることをいう. $v_1, \ \cdots, \ v_n$ が V の基底のとき, $v_1, \ \cdots, \ v_n$ を固定するとき $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ で表される元 v と縦ベクトルとを次のように対応させれば

$$v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

V と n 次元複素ユークリッド空間 $\boldsymbol{C}^n$ との間に1対1の対応がつく．すなわち V を $\boldsymbol{C}^n$ だと思ってもよい．またこのとき n を V の複素次元といって $\dim_{\boldsymbol{C}} V$ または $\dim V$ とかく．

いま V が実線形空間のとき，$v_1, \cdots, v_n$ が V の基底であるということを V の任意の元 v が

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \qquad a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{R}$$

の形にただ一通りに表されることをいう．$v_1, \cdots, v_n$ が V の基底とすれば，V は n 次元実ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ と同じものと思ってよい．この場合には n を V の実次元といって $\dim_{\boldsymbol{R}} V$ または $\dim V$ とかく．

V が複素線形空間であるとき，V を実線形空間と考えることもできる．したがって V の複素次元と実次元と双方が定義される．明らかに $\dim_{\boldsymbol{R}} V = 2\dim_{\boldsymbol{C}} V$ の関係が成立している．

V に有限個の基底が存在するとき V は有限次元であるという．V が有限次元でないときは無限次元であるという．本書ではなんの断りもなしに線形空間といえば必ず有限次元の線形空間を意味するものとする．線形空間が有限でない可能性があるときは必ず‘無限次元かもしれない’と断ることにする．

いま V_i $(i = 1, 2)$ を無限次元かもしれない複素線形空間とする．このとき $f: V_1 \to V_2$ が複素線形写像であるということを，次の条件がみたされていることと定義する：

$$a, b \in \boldsymbol{C}, \quad v_1, v_2 \in V_1 \implies f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2)$$

さらに $V_1 = V_2 = V$ のときには，V から V への複素線形写像のことを V の自己準同型という．V の自己準同型の全体を $\mathrm{End}(V)$ とかく．さらに $V_1 = V$ で $V_2 = \boldsymbol{C}$ のときに，f が複素線形写像であることを，f が複素線形汎関数であるという．

V_1，V_2 が無限次元かもしれない実線形空間であるとき，$f: V_1 \to V_2$ が実線形写像であるということを次の条件がみたされていることと定義する：

$$a, b \in \boldsymbol{R}, \quad v_1, v_2 \in V_1 \implies f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2)$$

ここで前と同様に $V_1 = V_2 = V$ のときには f のことを自己準同型といって，V の自己準同型の全体を $\mathrm{End}(V)$ によって表す．また，さらに $V_1 = V$，$V_2 = \boldsymbol{R}$ のときに実線

形写像 $f: V\to \boldsymbol{R}$ のことを V の上の実線形汎関数という.

本書では多くの場合, '複素' または '実' と明示するが, もしそのような区別がされていないときは, 複素線形空間の話をしているときは断らない限りは '複素' で, 実線形空間の話をしているときは断らない限りは '実' を意味するものとする.

V が複素線形空間で, その次元を n とすれば, V の自己準同型は V の基底を1つきめれば $n\times n$ 型の行列で表される. 以下に $n\times n$ 型の複素数の行列の全体を $M(n, \boldsymbol{C})$ で表す. したがってこの場合には $\mathrm{End}(V)$ の代りに $M(n,\boldsymbol{C})$ とかいたりする. もちろんこの場合 $f\in \mathrm{End}(V)$ に対応する $M(n,\boldsymbol{C})$ の行列を A とすれば, $v\in V$ について $f(v)$ は Av という行列をベクトルに掛けた掛け算によって表される.

V が実線形空間でその実次元が n のとき, V の基底を固定すれば $\mathrm{End}(V)$ は, $n\times n$ の実数の行列の全体 $M(n,\boldsymbol{R})$ と同じものと思ってよい.

本書では複素線形空間を主に用いるので, 以下に複素線形空間について説明してときどき実線形空間についてあとで必要になる注意をすることにする.

いま A は $M(n,\boldsymbol{C})$ に属する行列とする. このとき A の行列式を $\det A$ で表すことにする.

本書では $M(n,\boldsymbol{C})$ の単位行列を E で表すことにする. すなわち E は次の形である:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

いま $A\in M(n,\boldsymbol{C})$ とするとき, 変数 x をとって $F(x)=\det(xE-A)$ とすれば $F(x)$ は x についての n 次の多項式になっている. この多項式を A の固有多項式といい, $F(x)=0$ を A の固有方程式という. A の固有値はすべて A の固有方程式の根であり, 逆に A の固有方程式の根は A の固有値になっている.

固有方程式について次の Hamilton–Cayley (ハミルトン－ケーリー) の定理は大切である.

定理 1. $A\in M(n,\boldsymbol{C})$ で $F(x)$ を A の固有多項式とするとき, $F(A)$ は零行列になっている. すなわち $F(A)=0$ が成立する.

[証明] $B(x)=xE-A$ とする. すなわち $B(x)\in M(n,\boldsymbol{C})$ でその成分は x の1次

式になっている．x を変数と考えて $B(x)$ の逆を作れば，それは次の形をしている：

$$\frac{\widetilde{B}(x)}{F(x)}$$

ここに $\widetilde{B}(x) \in M(n, C)$ で $\widetilde{B}(x)$ の成分は x の多項式になっている．これから明らかに次の式が成立する：

$$\widetilde{B}(x)B(x) = F(x)\cdot E$$

ここで右辺の $F(x)$ はスカラーであって行列ではないことを注意しておく．これから任意の v_1, …, v_n について次の式が成立している：

$$\widetilde{B}(x)B(x)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x)v_1 \\ \vdots \\ F(x)v_n \end{pmatrix}$$

ところで次の計算が成立する：

$$B(A)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (AE - A)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

これから明らかに $F(A) = 0$ が得られた．■

$A \in M(n, C)$ とするとき，$\det A \neq 0$ と A の逆行列 A^{-1} が存在することとは同等である．逆行列 A^{-1} は $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ をみたす行列である．

$A \in M(n, C)$ が対角行列であるということを，A が次の形の行列であることをいう：

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

A が対角化可能ということを，ある $\det(S) \neq 0$ となる S が存在して SAS^{-1} が対角行列になることをいう．

A がべき零であるということを，十分大きな m をとれば A^m が零行列になることをいう．すなわち $A^m = 0$.

$A, B \in M(n, C)$ とするとき，$AB = BA$ が成立すれば A と B とは可換という．

さて A の Jordan（ジョルダン）分解についてのべておこう．まずそのための補題を証明する．

補題1. $A \in M(n, C)$ として，A の固有多項式を因数分解して $\prod_i (x-a_i)^{m_i}$ として，a_1，…，a_k は互いに相異なる複素数とする．このとき

$$V_i = \{v \in C^n \mid (A-a_i)^{m_i}v = 0\}$$

とすれば，C^n は V_1，…，V_k の直和で表される．さらに $AV_i \subseteq V_i$ となっている．

［証明］ まず $F(x) = (x-a_1)^{m_1}Q(x)$ とすれば，$(x-a_1)^{m_1}$ と $Q(x)$ は互いに素である．したがって次の性質をみたす多項式 $S(x)$，$T(x)$ が存在する：

$$(x-a_1)^{m_1}S(x) + Q(x)T(x) = 1$$

この式から，任意のベクトル v について

$$(A-a_1)^{m_1}S(A)v + Q(A)T(A)v = v$$

が成立することがわかる．左辺の最初の項を v_0，第2の項を v_1 とすれば，明らかに $v_1 \in V_1$ であり，v_0 については $Q(A)v_0 = 0$ となる．この $v = v_0 + v_1$ で $(A-a_1)^{m_1}v_1 = 0$，$Q(A)v_0 = 0$ となる分解の仕方は一意的であることを証明する．このために $0 = v_0 + v_1$ で v_0, v_1 が $Q(A)v_0 = 0$，$(A-a_1)^{m_1}v_1 = 0$ をみたすとき v_0 と v_1 が0になることをいえばよい．ところで $0 = v_0 + v_1$ の両辺に $(A-a_1)^{m_1}$ を掛ければ $(A-a_1)^{m_1}v_0 = 0$ がでてくる．したがって任意の v について $(A-a_1)^{m_1}v = 0$，$Q(A)v = 0$ ならば v が0となることを証明すればよい．ところでこれは

$$v = (S(A)(A-a_1)^{m_1} + T(A)Q(A))v = 0$$

となって明らかである．

したがって $v = v_0 + v_1$ とする分解が直和の分解であることがわかった．あとは $Q(A) \cdot v_0 = 0$ となった v_0 について $Q(x) = (x-a_2)^{m_2}Q_2(x)$ と分解して同じことを続けていけば補題が証明される．

最後に $AV_i \subseteq V_i$ になることは，$v_i \in V_i$ として

$$(A-a_i)^{m_i}Av_i = A(A-a_i)^{m_i}v_i = 0$$

となることから明らかである．■

定理2. $A \in M(n, C)$ とするとき次の性質が成立する：

（i） $A = A_d + A_n$，A_d は対角化可能，A_n はべき零であって A_d と A_n とは可換となる A_d，A_n がただ一通り存在する．

（ii） 変数 x についての定数項のない多項式 $P(x)$，$Q(x)$ で $A_d = P(A)$，$A_n = Q(A)$ となるものが存在する．したがって A と交換可能な行列 B はすべて A_d，

A_n と交換可能になる．

(iii) いま $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \boldsymbol{C}^n$ で V_1, V_2 が $\boldsymbol{C}^n$ の複素線形部分空間とする．このとき $A : V_2 \to V_1$ であれば，$A_d : V_2 \to V_1$ で $A_n : V_2 \to V_1$ となる．

$A = A_d + A_n$ のことを A の Jordan 分解という．A_d を A の対角化可能部分，A_n を A のべき零部分という．

［証明］ A の固有多項式を因数分解して $\prod_i (x - a_i)^{m_i}$ とする．ここに $a_1, \cdots, a_k$ は相異なるものとする．このとき，$V_i = \{v \in \boldsymbol{C}^n \mid (A - a_i)^{m_i} v = 0\}$ とおけば $\boldsymbol{C}^n$ は $V_1, \cdots, V_k$ の直和になっている，$AV_i \subseteq V_i$ をみたす．さて $(x - a_1)^{m_1}, \cdots, (x - a_k)^{m_k}$ は互いに素であるから次の条件をみたす多項式 $P(x)$ が存在する：

$$P(x) \equiv a_i \qquad \operatorname{mod} (x - a_i)^{m_i} \qquad (i = 1, \cdots, k)$$
$$P(x) \equiv 0 \qquad \operatorname{mod} x$$

ここに $P(x) \equiv a_i \operatorname{mod} (x - a_i)^{m_i}$ の意味は $P(x)$ を $(x - a_i)^{m_i}$ で割ったときの剰余が a_i であるということである．したがって $P(x) \equiv 0 \operatorname{mod} x$ は単に $P(x)$ に定数項がないことを意味する．

この上で $Q(x) = x - P(x)$ とおけば，$Q(x)$ も定数項のない多項式になっており，$A_d = P(A)$, $A_n = Q(A)$ とおけば $A = A_d + A_n$ となることと，定理の (ii) がみたされることは明らかである．いま $U_0 \subseteq \boldsymbol{C}^n$ が $AU_0 \subseteq U_0$ をみたす複素線形部分空間とすれば $A_d U_0 \subseteq U_0$, $A_n U_0 \subseteq U_0$ となる．これは A_d と A_n とが A の多項式の形にかけることから明らかである．この特別な場合として $A_d V_i \subseteq V_i$, $A_n V_i \subseteq V_i$ となる．

$P(x) \equiv a_i \operatorname{mod} (x - a_i)^{m_i}$ であるから $A_d = P(A)$ は V_i の上では a_i と同じになる．すなわち

$$v \in V_i \implies A_d v = a_i v$$

したがって A_d は V_i の上ではどの様な基底を選んでも対角行列であり，V は $V_1, \cdots, V_k$ の直和になっているから V_d は対角化可能である．また $Q(x) = x - P(x)$ であるから

$$Q(x) = x - (S(x)(x - a_i)^{m_i} + a_i)$$
$$= (x - a_i) T(x)$$

となる多項式 $S(x)$, $T(x)$ が存在する．これから V_i の任意の元 v について

$$A_n^{m_i} v = T(A)^{m_i} (A - a_i)^{m_i} v = 0$$

となる．したがっていま $m = \max(m_1, \cdots, m_k)$ とおけば A_n^m はすべての $V_1, \cdots, V_k$

の上で0となる．したがって $A_n{}^m$ は C^n の上で0となって A_n がべき零であることがわかった．

$P(x)$，$Q(x)$ には定数項がないから (iii) は明らかである．したがって定理の証明で残ったところは（i）で分解の仕方がただ一通りというところである．したがって，いま $A=B+C$ が別の分解であって，B が対角化可能で C がべき零であって B と C とが可換であったとする．このとき A は B, C と可換，したがって B, C, A_d, A_n はすべて可換になる．したがって A_d-B も対角化可能になっている．ところで $A_d-B=C-A_n$ であるから A_d-B は対角化可能でべき零になっている ($C^l=0$, $A_n{}^m=0$ とすれば C と A_n とは可換であるから $(C-A_n)^{l+m}=0$ となる.)．対角行列でべき零のものは零行列しかないから $A_d=B$ で $C=A_n$ であることがわかって証明が完了した．■

次にべき零の行列の代表的なものが次の形であることを注意しておく：

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{pmatrix}$$

＊のところだけが0でないものがでてくる可能性がある．

これがべき零になることは，この形のものを実際に n 回掛けてみれば零行列が得られることから明らかである．

ここに対角化可能な行列についての簡単な補題を2つ証明しておこう．

補題 2. $\{A_\alpha\} \subseteq M(n, C)$ であって，$\{A_\alpha\}$ は互いに可換な対角化可能な行列であるとする．このとき $S \in M(n, C)$ で $SA_\alpha S^{-1}$ がすべての α について対角行列になっているような S が存在する．

［証 明］ 厳密には n についての数学的帰納法で証明する．

A_α がすべて cE の形ならば問題はないから，そうでないものを1つとってそれをまず $S_0A_{\alpha_0}S_0{}^{-1}$ と対角化した結果を

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & & \\ & & c_1 & & & & \\ & & & c_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & & & c_2 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad c_i \neq c_j \ (i \neq j)$$

の形であったとする．すべての A_α の代りに $S_0A_\alpha S_0^{-1}$ を考えれば，初めからこの形のものが A_α のなかに入っていたものとしてよい．すなわち A_{α_0} 自身がこの形であったと思ってよい．ところで $A_\alpha B=BA_\alpha$ を計算してみればすべての A_α と可換な行列が

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

の形であることがわかる．したがって B が対角化可能で上の形であるときにそれぞれの B_i がまた対角化可能であることを証明すれば数学的帰納法の仮定から証明が完結する．したがって，いまこれを証明する．

さて B が対角化可能ということは，v_1, …, $v_n\in C^n$ という一次独立な B の固有ベクトルが存在するということである．いま B_1 が対角化可能のことをいうために B_1 の $k\times k$ 行列として，v_1, …, v_n の最初の k 成分だけからできる C^k のベクトルをそれぞれ v_1', …, v_n' とする．もちろん v_1', …, v_n' は C^k を張る．ところで v_1, …, v_n は B の固有ベクトルであるから v_1', …, v_n' は B_1 の固有ベクトルになっている．すなわち B_1 が対角化可能であることがわかった．■

補題 3.　いま A が C^n の上の対角化可能行列で $W\subseteq C^n$ は次の条件をみたすものとする：

$$w\in W \implies Aw\in W$$

このとき A を W の上に制限した線形写像 $A\restriction W$ はやはり対角化可能である．

［証明］　A は対角化可能であるから $C^n=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ の形の直和分解で

$$v\in V_i \implies Av=a_iv$$

で $a_i\neq a_j$ $(i\neq j)$ なるものが存在する．いま W が　$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_m$,　$W_i=V_i\cap W$　の形にかけることをいえばよい．すなわち $w\in W$ として

$$w=w_1+\cdots+w_m \qquad w_i\in V_i$$

とかいたときに $w_i\in W$ をいえばよい．このため w_1, …, w_m のなかの 0 でないものの数を k として k についての数学的帰納法で証明する．

いま一般性を失うことなしに $w=w_1+\cdots+w_k$ として $w_i\neq 0$ $(1\leq i\leq k)$ とする．このとき　$Aw=a_1w_1+\cdots+a_kw_k\in W$　であるから

$$(a_1-a_k)w_1+\cdots+(a_{k-1}-a_k)w_{k-1}\in W$$

となる数学的帰納法の仮定から $w_1,\ \cdots,\ w_{k-1}\in W$, したがって $w_k\in W$ となり証明が終った. ■

いま V を複素線形空間とするとき $\beta: V\times V\to C$ が双一次形式ということを次の条件がみたされていることと定義する. ここに $a,b\in C,\ v_1,v_2,v\in V$ とする.

$$\beta(av_1+bv_2,v)=a\beta(v_1,v)+b\beta(v_2,v)$$

$$\beta(v,av_1+bv_2)=a\beta(v,v_1)+b\beta(v,v_2)$$

双一次形式 β が非退化であるということを, どんな V の元 v_1 をとっても, $v_1\neq 0$ ならば $\beta(v_1,v_2)\neq 0$ となる v_2 がみつかることと定義する.

双一次形式 β が対称であるということを次の条件がみたされていることと定義する. ここに $v_1,v_2\in V$ とする.

$$\beta(v_1,v_2)=\beta(v_2,v_1)$$

定理 3. β が非退化な対称双一次形式ならば, V の基底 $v_1,\ \cdots,\ v_n$ で次の条件をみたすものが存在する:

$$\beta(v_i,v_j)=\delta_{ij}$$

ここに δ_{ij} は Kronecker (クロネッカー) のデルタである.

[証明] まず β が非退化であるから $\beta(u_1,\ u_2)\neq 0$ となる $u_1,\ u_2$ が存在する. いま $v_1=u_1+\lambda u_2$ とおけば

$$\beta(v_1,v_1)=\beta(u_1,\ u_1)+2\lambda\beta(u_1,\ u_2)+\lambda^2\beta(u_2,\ u_2)$$

となるから $\beta(v_1,v_1)\neq 0$ となる λ が存在する. いま必要ならば v_1 の定数倍をあらためて v_1 と定義することによって v_1 は次の条件をみたすものとしてよい:

$$\beta(v_1,v_1)=1$$

いま V_1 を次の式で定義する:

$$V_1=\{v\in V|\beta(v_1,v)=0\}$$

いま u を V の任意の元とすれば, μ は

$$u=(u-\beta(u,v_1)v_1)+\beta(u,v_1)v_1$$

とかけ, $=$ の右辺の第1項は V_1 に属するから V_1 の次元は V の次元より1だけ小さい. したがって定理を V の次元についての数学的帰納法について証明するとすれば, V_1 については $v_2,\ \cdots,\ v_n$ が既に得られているから $v_1,v_2,\ \cdots,\ v_n$ が求めるものとなる. ■

定理 4. β が V の上の非退化な対称双一次形式で $x_1, \cdots, x_n$ が V の基底ならば，V の元 $y_1, \cdots, y_n$ で次の条件をみたすものが存在する．

$$\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$$

［証明］ 定理1によって $\beta(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ となる V の基底 $v_1, \cdots, v_n$ が存在する．いま $A \in M(n, C)$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

をみたすものと定義する．$A = (a_{ij})$ とする．$x_1, \cdots, x_n$ は基底であるから $A^{-1} = (b_{ij})$ が存在する．いま $c_{ij} = b_{ji}$ と定義して $y_1, \cdots, y_n$ を

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

によって定義する．ここに $C = (c_{ij})$ とする．

このとき $\beta(x_i, y_j)$ を計算すれば

$$\begin{aligned} \beta(x_i, y_j) &= \beta\left(\sum_k a_{ik} v_k, \ \sum_l c_{jl} v_l\right) \\ &= \sum_{k,l} a_{ik} c_{jl} \beta(v_k, v_l) = \sum_{k,l} a_{ik} c_{jl} \delta_{kl} \\ &= \sum_k a_{ik} c_{jk} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

となって定理が証明された．■

次に Schur（シュア）のレンマについてのべることにする．いま V を複素線形空間，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{End}(V)$ とする．いま V の複素線形部分空間 U が $\mathcal{S}$ について閉じているまたは不変であるということを，次の条件をみたしていることとする．

$$v \in U, \ A \in \mathcal{S} \implies Av \in U$$

$\mathcal{S} \subseteq \mathrm{End}(V)$ が既約であるということを，V の線形部分空間 U が $\mathcal{S}$ で閉じているならば，U は V 自身か $\{0\}$ であるときに限ることをいう．

定理 5. (Schur のレンマ)　$\mathcal{S} \subseteq M(n, C)$ が C^n の上で既約であるとする．このとき，$A \in M(n, C)$ が次の条件をみたすならば，A は cE の形である．ここに $c \in C$,

$$B \in \mathcal{S} \implies AB = BA$$

［証明］ A の固有値の1つを c として，その固有ベクトルを $v \neq 0$ として U を次の

式で定義する．

$$U = \{v \in C^n \mid Av = cv\}$$

このとき $v_0 \in U$ となるから U は0でない．さらに次の計算によって U が S で閉じていることがわかるから，S の既約性から $U = V$ すなわち $A = cE$ がわかった．

$$v \in U,\ B \in S \implies ABv = BAv = cBv \qquad \blacksquare$$

次にテンソル積についてのべることにする．いま V を m 次元の複素線形空間，U を n 次元の複素線形空間としてその基底をそれぞれ $v_1, \cdots, v_m$ と $u_1, \cdots, u_n$ とする．このとき mn 個の元 $v_i \otimes u_j$ を基底として張られる複素線形空間を V と U とのテンソル積といって $V \otimes U$ で表す．V と U との直積は $m+n$ 次元であって，テンソル積は mn 次元であることに注意されたい．

$$\otimes : \ V \times U \longrightarrow V \otimes U$$

を次のように定義する：

$$(\sum_i a_i u_i) \otimes (\sum_j b_j v_j) = \sum_{i,j} a_i b_j u_i \otimes v_j$$

いま $A \in \mathrm{End}(V)$，$B \in \mathrm{End}(U)$ とするとき $A \otimes B \in \mathrm{End}(V \otimes U)$ を次の式で定義する：

$$(A \otimes B)(u \otimes v) = (Au) \otimes (Bv)$$

次のいろいろの式が成立することは明らかであろう：

$$(av + bv') \otimes u = av \otimes u + bv' \otimes u$$

$$v \otimes (au + bu') = av \otimes u + bv \otimes u'$$

$$A \otimes B(ax + by) = a(A \otimes B)x + b(A \otimes B)y$$

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1 \cdot A_2) \otimes (B_1 \cdot B_2)$$

$$(aA_1 + bA_2) \otimes B = aA_1 \otimes B + bA_2 \otimes B$$

$$A \otimes (aB_1 + bB_2) = aA \otimes B_1 + bA \otimes B_2$$

ここで $x, y \in V \otimes U$ とする．

物理ではしばしば $v_i \otimes u_j$ のことを $v_i u_j$ とかく．これは V の基底と U の基底が全く異なった文字でかかれている場合にはよい記号法であるが，$V \otimes V$ のときなどは混乱のもととなる．

テンソル積はできたものが同型になるという意味で基底の選び方によらない．

次にあとで用いる Vandermonde（ヴァンデルモンド）の行列式について一言のべておく．これは

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

の形の行列式をいう．その答えは $\prod_{i>k}(x_i-x_k)$ となる．証明は $x_1, \cdots, x_n$ を文字と思えば，これが x_i-x_k で割り切れることは明らかであり，あとは双方の多項式としての次数が同じことと，1つの項の係数を比べることによって容易にわかる．

さらに Lagrange（ラグランジュ）の補間式についてものべておこう．

これは相異なる $x_1, \cdots, x_n$ の点でそれぞれ $a_1, \cdots, a_n$ の値をとる多項式の作り方の1つである．まず $\Pi(x)$ と $I_i(x)$ を次の式で定義する：

$$\Pi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i), \qquad I_i(x)=\frac{\Pi(x)}{(x-x_i)\Pi'(x_i)}$$

ここに $\Pi'(x)$ はもちろん $\Pi(x)$ の導関数である．このとき Lagrange の補間式は次の多項式 $L(x)$ を意味する：

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i I_i(x)$$

これが求める条件をみたすことは x に x_i を代入してみれば直ちにわかる．

次にトレースについてのべることにする．いま $A\in M(n,C)$ として $A=(a_{ij})$ とする．このとき

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

によって A のトレースを定義する．すなわち対角線の項の和である．トレースについては $A, B\in M(n,C)$ とするときの次の公式が大切である：

$$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$$

これは計算をすると直ちにでてくる．この特別な場合として $\mathrm{Tr}(SAS^{-1})=\mathrm{Tr}(A)$ がでてくる．

さて $M(n,C)$ の位相について考えることにする．$M(n,C)$ の元を A とすると，A は (a_{ij}) という n^2 個の a_{ij} を四角に並べたものになっている．もしこれを一列に並べれば

C^{n^2} と同じものになっている．したがって C^{n^2} の普通の複素ユークリッド空間の位相が入る．これをもう少し詳しくいえば $A_k = (a_{ij}{}^{(k)})$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ で $A = (a_{ij})$ としたとき

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k \iff \text{すべての } 1 \leq i, j \leq n \text{ について } a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}{}^{(k)}$$

によって極限を定義するということになる．すなわち A_1, A_2, A_3, $\cdots$ が A に近づくということを，項別に近づくということと定義するわけである．

もっと C^{n^2} の位相に基づいた議論をすれば，C^{n^2} の原点に対応する $M(n, C)$ の元は零行列である．C^{n^2} の任意のベクトル x について x のノルム $\|x\|$ を原点から x までの距離によって定義する．同じことを $A \in M(n, C)$ についてすれば，A のノルム $\|A\|$ は次の式で与えられる．ここに $A = (a_{ij})$ とする：

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

ここに $|a_{ij}|$ は a_{ij} の（複素数としての）絶対値である．ところで C^{n^2} において，2つのベクトル x と y との距離 $d(x, y)$ は $\|x - y\|$ によって与えられる．全く同じく $A, B \in M(n, C)$ に対して A と B との距離 $d(A, B)$ は $\|A - B\|$ によって与えられる．この様にすると，複素ユークリッド空間の性質がそのまま成立する．これをかくと次のようになる：

$$\|A\| \geq 0 \qquad \|A\| = 0 \iff A = 0$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$
$$\|aA\| = |a|\,\|A\|$$

また $A = \lim_{k\to\infty} A_k$ は $A = (a_{ij})$, $A_k = (a_{ij}{}^{(k)})$ としたうえで詳しくかけば次の条件になっている：

　すべての i, j $(1 \leq i, j \leq n)$ とすべての $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな N が存在して $k \geq N$ ならば $|a_{ij} - a_{ij}{}^{(k)}| < \varepsilon$ が成立している．

これを A のノルムを用いてかけば次のようにかける：

　すべての $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな N が存在して $k \geq N$ ならば $\|A - A_k\| < \varepsilon$ が成立している．

同様にして $A_k = (a_{ij}{}^{(k)})$ の列（すなわち A_1, A_2, A_3, $\cdots$）が Cauchy（コーシー）列であることを，次の条件をみたしていることと定義する：

　どんな $\varepsilon > 0$ をとっても十分大きな N をとれば，すべての $l, k \geq N$ に対して $\|A_l - A_k\| < \varepsilon$ が成立している．

このとき，$A=\lim_{k\to\infty}A_k$ ならば A_k の列が Cauchy 列になっており，逆に A_k の列が Cauchy 列ならば $A=\lim_{k\to\infty}A_k$ となる様な A がただ一通り存在することがいえる．A_k の列が Cauchy 列のことを，A_k の列が収束するともいう．

次に $f: M(n,C)\times M(n,C)\to M(n,C)$ であるときに，f が連続であるということを C^{n^2} の上で考えるのと同じく次の条件で定義する：

$$A=\lim_{k\to\infty}A_k,\ \ B=\lim_{k\to\infty}B_k \implies f(A,B)=\lim_{k\to\infty}f(A_k,B_k)$$

これはまた次の条件と同じになる．

すべての $A,B\in M(n,C)$ と $\varepsilon>0$ に対して次の条件をみたすような $\delta>0$ が存在する：

$$\|A-A_1\|<\delta,\ \ \|B-B_1\|<\delta \implies \|f(A,B)-f(A_1,B_1)\|<\varepsilon$$

このとき $A\cdot B$ は $M(n,C)\times M(n,C)\to M(n,C)$ なら関数として連続になっている．これは $A\cdot B$ の各項が A と B の項の多項式で表されることから明らかである．さらに $A+B$ も連続であり，$a\cdot A$ も連続である．最後のものを詳しくいえば $a=\lim_{k\to\infty}a_k$，$A=\lim_{k\to\infty}A_k$ の仮定のもとで $aA=\lim_{k\to\infty}a_kA_k$ となっている．

ここに実用的な補題を2つのべておこう．

補題 4.　$A,B\in M(n,C)$ とすれば次の式が成立する：

$$\|AB\|\le\|A\|\|B\|$$

［証明］　$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$AB=(c_{ij})$ とすれば $c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$ であるから

$$\begin{aligned}\|AB\|^2&=\sum_{i,j}|\sum_k a_{ik}b_{kj}|^2\le\sum_{i,j}\sum_k|a_{ik}|^2\sum_k|b_{kj}|^2\\&=(\sum_{i,k}|a_{ik}|^2)(\sum_{j,k}|b_{kj}|^2)=\|A\|^2\|B\|^2\end{aligned}$$ ■

補題 5.　$\|A_k\|\le a_k$ で a_k が収束するならば A_k も収束する．

［証明］　A_k が Cauchy 列になることをいえばよいが，これは a_k が Cauchy 列であることと $\|A_k\|\le a_k$ より明らかである．■

この補題は次のように用いられる．$\sum_k A_k$ の収束をいうときに $\|A_k\|\le a_k$ となる $\sum_k a_k$ の収束をいえばよい．このとき $\sum_k a_k$ を優級数という．優級数が存在するときは順序など変えてよいことは普通の級数と同じようになされる．

本書では余り必要はないが，C^{n^2} の位相の $M(n,C)$ への翻訳をもう少し続けることに

しよう．

いま $A \in M(n,C)$，$\varepsilon > 0$ としたとき A の ε- 近傍 $U(A,\varepsilon)$ を次の式で定義する：

$$U(A,\varepsilon) = \{B \in M(n,C) \,|\, \|A-B\| < \varepsilon\}$$

いま $X \subseteq M(n,C)$ としたとき，X が $M(n,C)$ の開集合であるということを次の条件がみたされていることと定義する：

すべての $A \in X$ に対して，次の条件をみたす様なある $\varepsilon > 0$ が存在する：

$$U(A,\varepsilon) \subseteq X$$

さらに $X \subseteq M(n,C)$ が $M(n,C)$ の閉集合であるということを次の条件をみたすことと定義する：

すべての k について $A_k \in X$ で $A = \lim_{k\to\infty} A_k$ とするならば，A もまた X の元になっている．

これらはすべて C^{n^2} の定義のそのままな翻訳であるから C^{n^2} と同じく，X が閉集合であることと X の補集合（すなわち詳しくいえば $M(n,C)-X$）が開集合であることは同等になる．

さて $A \in M(n,C)$ として $\exp A$ を次の式で定義する：

$$\exp A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \lim_{k\to\infty}\sum_k \frac{A^k}{k!}$$

右辺が収束することは $\|A\| = a$ とすれば $\dfrac{\|A^k\|}{k!} \leq \dfrac{a^k}{k!}$ であるから明らかである．

さて $GL(n,C)$ の定義をすることにする．$GL(n,C)$ は集合として次の式で定義される：

$$GL(n,C) = \{A \in M(n,C) \,|\, \det A \neq 0\}$$

いま $A,B \in GL(n,C)$ とすれば，$\det(AB) = \det A \cdot \det B$ から $AB \in GL(n,C)$ となる．また $\det A \neq 0$ から A の逆行列 A^{-1} が存在して $\det A^{-1} \neq 0$ となるから A^{-1} も $GL(n,C)$ の元となる．したがって行列の掛け算に関して $GL(n,C)$ は群になっている．もちろん群の単位元は単位行列である．さらに行列の積 AB は前にのべた様に A と B との2変数の関数として連続になっている．また A^{-1} の成分は A の成分の有理関数であり，その分母は $\det A$ である．有理関数は分母が0でないときには連続であるから A^{-1} は A の連続関数になっている．すなわち群の演算はすべて連続になっている．群の演算がすべて連続であるときにその群を位相群という．すなわち $GL(n,C)$ は位相群になっている．

次に $\det A$ は A の成分の多項式である．したがって A の連続関数になっている．したがって，どんな A と，どんな $\varepsilon>0$ をとっても十分小さな $\delta>0$ をとれば $\|A-B\|<\delta$ なる限り $|\det A-\det B|<\varepsilon$ となるようにできる．したがって $\det A\neq 0$ ならば，十分小さな $\delta>0$ をとれば，$\|A-B\|<\delta$ なる限り $\det B\neq 0$ となるようにできる．このことは $GL(n,\boldsymbol{C})$ が $M(n,\boldsymbol{C})$ のなかで開集合になっていることを意味している．

いま V を無限次元かもしれない複素線形空間とする．このとき $GL(V)$ を次の式で定義する：

$$GL(V)=\{f\in \mathrm{End}(V)\,|\,f \text{ は } V \text{ から } V \text{ の上への 1 対 1 の写像になっている}\}$$

明らかに $GL(V)$ は写像の積について閉じていて，さらに任意の $f\in GL(V)$ について $f:V\to V$ は 1 対 1 で V の上への写像であるから逆写像 $f^{-1}:V\to V$ もやはり V の上への 1 対 1 の写像になっている．すなわち逆写像も $GL(V)$ の元になっている．すなわち $GL(V)$ は写像の積について群になっている．$V=\boldsymbol{C}^n$ とするときは明らかに $GL(V)=GL(n,\boldsymbol{C})$ になっている．V が無限次元のときは，我々は $GL(V)$ は群としてその代数的な構造だけを考えて位相の方は考えないことにする．

$SL(n,\boldsymbol{C})$ を集合としては次の式によって定義する：

$$SL(n,\boldsymbol{C})=\{A\in GL(n,\boldsymbol{C})\,|\det A=1\}$$

$\det A=\det B=1$ ならば $\det AB=1$ であり $\det A^{-1}=1$ となるから $SL(n,\boldsymbol{C})$ が $GL(n,\boldsymbol{C})$ の部分群になっていることは明らかであろう．さらに前の $GL(n,\boldsymbol{C})$ でのべたのと同じ理由で $SL(n,\boldsymbol{C})$ も位相群になっている．しかも $SL(n,\boldsymbol{C})$ は $M(n,\boldsymbol{C})$ または $GL(n,\boldsymbol{C})$ のなかで閉集合になっている．これは $A_k\in SL(n,\boldsymbol{C})$ として，さらに $A\in M(n,\boldsymbol{C})$ として $\lim_{k\to\infty}A_k=A$ とすれば，det は連続関数であるから，

$$\det A=\lim_{k\to\infty}\det A_k=1$$

となって $A\in SL(n,\boldsymbol{C})$ であることがわかる．

$GL(n,\boldsymbol{C})$，$SL(n,\boldsymbol{C})$ の定義での $M(n,\boldsymbol{C})$ を $M(n,\boldsymbol{R})$ に換えてできるものを $GL(n,\boldsymbol{R})$，$SL(n,\boldsymbol{R})$ とかく．正確にかけば

$$GL(n,\boldsymbol{R})=\{A\in M(n,\boldsymbol{R})\,|\det A\neq 0\}$$

$$SL(n,\boldsymbol{R})=\{A\in GL(n,\boldsymbol{R})\,|\det A=1\}$$

となる．

次にユニタリー行列についてのべることにする．まず $A \in M(n, C)$ としたときに，$A = (a_{ij})$ として A の転置行列 ${}^tA$ を ${}^tA = (b_{ij})$，ここに $b_{ij} = a_{ji}$ によって定義する．もっと詳しくかけば次のようになる：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

次に $A \in M(n, C)$ として，$A = (a_{ij})$ とするとき $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ と定義する．ここに $\bar{a}_{ij}$ は a_{ij} の複素共役を意味する．

いま $A \in M(n, C)$ とするとき，$A^* = {}^t\bar{A}$ と定義する．A^* は A の共役行列と呼ばれる．そして A がユニタリーであるということを次の式がみたされていることと定義する：

$$AA^* = A^*A = E$$

すなわち A がユニタリーであるということは $A^* = A^{-1}$ ということである．いまユニタリー群 $U(n)$ を次の式で定義する：

$$U(n) = \{A \in M(n, C) \,|\, A \text{ はユニタリーである}\}$$

一般に $(AB)^* = B^*A^*$ となるから，$A, B \in U(n)$ とするとき $AB \in U(n)$ になることは明らかである．さらに $A \in U(n)$ とすれば，$A^{-1} = A^*$ から $(A^{-1})^* = A$ となって $A^{-1} \in U(n)$ も直ちにわかるから，$U(n)$ が $GL(n, C)$ の部分群になっていることがわかる．ユニタリーは C^n の内積と密接な関係がある．これらのことは既知とするが，ここに一通りまとめておくことにする．このことについては最も初等的な解説として [5] をあげておく．

$x, y \in C^n$ として，x の座標と $x_1, \cdots, x_n$，y の座標を $y_1, \cdots, y_n$ とするとき，x と y との内積 (x, y) を次の式で定義する：

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$

いま $(x, y) = 0$ のとき，x と y とは直交するといって $x \perp y$ で表すことにする．

x の長さを $\|x\|$ で表せば，$\|x\|^2 = (x, x)$ となっている．

$A \in M(n, C)$，$x, y \in C^n$ とすれば次の式が成立する：

$$(x, Ay) = (A^*x, y)$$

$U \in U(n)$ のことと，すべての $x, y \in C^n$ について $(Ux, Uy) = (x, y)$ が成立することと同等になっている．すなわち U は内積を変えない．これはまた，次の条件とも同様である：

すべての $x \in C^n$ について $\|x\| = \|Ux\|$ が成立する.

いま C^n の基底 $x_1, \cdots, x_n$ が正規直交系であるということを次の式が成立していることと定義する.

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij}$$

いま $x_1, \cdots, x_n$ が正規直交系で, U がユニタリーとすれば, $Ux_1, \cdots, Ux_n$ は正規直交系になっている. 逆に $x_1, \cdots, x_n$ と $y_1, \cdots, y_n$ とを2つの正規直交系とすれば, $y_1 = Ux_1, \cdots, y_n = Ux_n$ となっているようなユニタリー行列 U がただ一通り存在する.

いま $A \in M(n, C)$ として, A が正規作用素であるということを $AA^* = A^*A$ が成立していることと定義する. A が正規ならば適当なユニタリー行列 U をとれば U^*AU は対角行列になっている. すなわち

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ここに $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in C$ である. この逆も成立する.

$A \in M(n, C)$ が $A = A^*$ をみたすときに A は自己共役であるという. A が自己共役ならば A はもちろん正規である. A が自己共役のとき, 通常なユニタリー行列 U をとって U^*AU が対角行列になったとき, すなわち

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

のとき $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は実数になっている. もちろんこの $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値になっている. 逆に $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が実数になる様に U がとれれば A は自己共役である.

A が正規であることと, $A = B + iC$ であって B, C が可換な自己共役行列となる様に B, C がとれることとは同等である.

A が自己共役で, すべての $x \in C^n$ に対して $(x, Ax) \geq 0$ となるならば A は正の自己共役行列という. A が正の自己共役行列であるとき, $B^2 = A$ となる正の自己共役な B がただ一通り存在する.

正の自己共役行列 A が $\det A \neq 0$ のとき, A は正の定符号であるという. これは固有値がすべて正の自己共役行列といっても同じことである.

A が正の定符号ならば, 次の式が成立する：

$$(x, Ax) \geq 0 \quad \text{で} \qquad (x, Ax) = 0 \iff x = 0$$

この逆も成立する．すなわちすべての $x \in C^n$ についてこの条件がみたされている自己共役行列は正の定符号である．

さて $U = (u_{ij})$ として $U \in U(n)$ とすれば，U^*U の (i, i) 成分が1になることを式でかけば

$$|u_{j1}|^2 + \cdots + |u_{in}|^2 = 1$$

となる．このことから $|u_{ij}| \leq 1$ がわかる．すなわち $U(n)$ は $M(n, C)$ のなかで有界になっていることがわかる．

さらに $U(n)$ は $M(n, C)$ のなかで閉じている．これは * と行列の掛け算が連続であることから $U_k \in U(n)$，$U = \lim_{k\to\infty} U_k$ とすれば

$$U^*U = \lim_{k\to\infty} U_k^* \lim_{k\to\infty} U_k = \lim_{k\to\infty} U_k^* U_k = E$$

となることからわかる．

したがって $U(n)$ は $M(n, C)$ のなかの有界閉集合であることがわかる．Heine–Borel (ハイネ - ボレル) の定理によって複素ユークリッド空間のなかの有界閉集合はコンパクトであるから $U(n)$ がコンパクトであることがわかる．すなわち次の条件がみたされる：

$\{V_\alpha\}$ が $U(n)$ の(または $M(n, C)$ の)開集合の積であってさらに
$U(n) \subseteq \bigcup_\alpha V_\alpha$ がみたされているとすれば，有限個の $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ で
$U(n) \subseteq V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_m}$ をみたすものが存在する．

コンパクトについての，有用なよく知られた性質を念のために1つあげておく．

$f: X \to Y$ で，X はコンパクト，Y は距離空間，f は1対1で連続とすれば，$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ は Y の閉集合であり，$Y_0 = f(X)$ とおけば $f^{-1}: Y_0 \to X$ もまた連続である．すなわち f は位相同型写像になっている．

$SU(n)$ を次の式で定義する：

$$SU(n) = \{U \in U(n) | \det U = 1\}$$

これから　$SU(n) = SL(n, C) \cap U(n)$　であることがわかる．$SU(n)$ は2つの閉集合の共通部分であるから，$M(n, C)$ のさらに $GL(n, C)$ の閉集合になっている．もちろん $U(n)$，$SU(n)$，$SL(n, C)$ はすべて $GL(n, C)$ の部分群であるから位相群になっている．

本書で主に議論するのは $SL(n, C)$ と $SU(n)$ である．

以上にのべたことの簡単な応用として簡単な補題を証明しておく．

補題 6. $A \in SL(n,C)$ とする．このとき $A=UP$，$U \in SU(n)$，P は $SL(n,C)$ の正の定符号の自己共役である様な U と P とがただ一通り存在する．

［証明］ まず存在をいう．A^*A は $(x, A^*Ax) = \|Ax\|^2$ から明らかに正の自己共役，したがって $P^2 = A^*A$ となる正の自己共役行列 P がただ一通り存在する．ところで $\det A^*A = 1$ であって，P が正の自己共役であるから $\det P \geq 0$ また $(\det P)^2 = 1$ であるから $\det P = 1$ となって P は正の定符号の自己共役な $SL(n,C)$ の元であることがわかる．$U = AP^{-1}$ とおけば $U^*U = P^{-1}A^*AP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = E$ となるから U はユニタリーとなる．ただ一通りであることも，$P^2 = A^*A$ から明らかである．■

このただ一通りに定まった U と P とを $U(A)$，$P(A)$ と仮にかくことにすれば，この U と P との作り方から，$U(A)$，$P(A)$ は A の連続関数になっていることが明らかである．逆に $\mathfrak{P}$ を次の式で定義する：

$$\mathfrak{P} = \{P \in SL(n,C) \,|\, P \text{ は正の定符号の自己共役行列}\}$$

このとき

$$SL(n,C) \rightleftarrows SU(n) \times \mathfrak{P}$$

の2つの写像を → は A から U, P を作る写像，← を U と P から UP を作る写像とすればこれは1対1で共に連続であるから，位相空間としては，$SL(n,C)$ は $SU(n) \times \mathfrak{P}$ と全く同じ位相空間になっている．この $\mathfrak{P}$ のことを $SL(n,C)$ の正の定符号部分と呼ぶ．

さて $A \in M(n,C)$ としたときの $\exp A$ の性質について調べることにしよう．まず簡単な性質を補題としてのべれば

補題 7. $A, B \in M(n,C)$ について，A と B とが可換とすれば，$\exp(A+B) = \exp A \exp B$ となる．したがって $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ となる．また $S \in GL(n,C)$ とすれば $\exp(SAS^{-1}) = S(\exp A)S^{-1}$ が成立する．また ${}^t(\exp A) = \exp {}^tA$，$(\exp A)^* = \exp A^*$.

［証明］

$$\exp(A+B) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{m!}{k!(m-k)!} A^k B^{m-k}$$

$$= \sum_{k,l} \frac{A^k}{k!} \frac{B^l}{l!} = \exp A \exp B$$

が機械的な計算である．あとは順序の変更などの問題であるが，これは $\exp(\|A\|+\|B\|)$ の優級数を考えれば明らかである．

$\exp(-A)$ が $\exp A$ の逆行列になることは $\exp 0 = E$ から明らかである．次のものも SAS^{-1} が A について連続であるから，級数の有限個に対して証明すればよいがそれは明らか．あとは明らか．■

定理 6. $A \in M(n, C)$ ならば　　$\det(\exp A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

［証明］ $\det(\exp SAS^{-1}) = \det(\exp A)$，$\mathrm{Tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$ となるから SAS^{-1} について証明すればよい．すなわち A を次の形の行列としてよい：

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \exp A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & * \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

このとき $\exp A$ はやはり上の形になるから定理は明らか．■

定理 7. $A, B \in M(n, C)$，$a = \max(\|A\|, \|B\|)$ とすれば

(i) $\|A^m - B^m\| \leq m a^{m-1} \|A - B\|$

(ii) $\|\exp A - \exp B\| \leq e^a \|A - B\|$

(iii) $\exp A$ は A の連続関数である．

［証明］ (i) は次の式より明らかである．

$$A^m - B^m = (A-B)A^{m-1} + B(A-B)A^{m-2} + \cdots + B^{m-1}(A-B)$$

(ii) は次の式より明らかである．

$$\|\exp A - \exp B\| \leq \sum_m \frac{1}{m!}\|A^m - B^m\| \leq \sum \frac{m a^{m-1}}{m!}\|A - B\|$$

$$= \sum_m \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\|A - B\| \leq e^a \|A - B\|$$

(iii) は(ii)からの結論である．■

次に $A \in M(n, C)$ に対して

$$\log(E + A) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{A^m}{m}$$

とおく．$\|A\| < 1$ とすれば $-\log(1 - \|A\|) = \sum_m \frac{\|A\|^m}{m}$ が優級数になるから $\log(E + A)$ は定義されている．もちろん $\log A$ は $\|A - E\| < 1$ のときに定義されているの

である.

定理8. $A, B \in M(n, C)$, $\|A\| < 1$, $\|B\| < 1$ として $a = \max(\|A\|, \|B\|)$ とおけば

$$\|\log(E+A) - \log(E+B)\| \leq \frac{1}{1-a}\|A-B\|$$

となる. したがって $\log(E+A)$ は A の連続関数になっている.

［証明］ 定理7の（i）によって明らかである. ■

定理9. $A \in M(n, C)$ とすれば次の式が成立する：

（i） $\|A\| < \log 2$ ならば $\log(\exp A) = A$

（ii） $\|A\| < 1$ ならば $\exp\log(E+A) = E+A$

［証明］ 機械的な計算をすれば $\log(\exp x) = x$ で $\exp\log(1+x) = 1+x$ であるから x についての形式的な無限級数の計算でこの式は成立する. したがって形式的な無限級数の計算では上の（i),（ii）の式は成立する. あとは有限和をとって近似を計算するだけであるが, 適当な実数をとったときの有限和の誤差で押えられるからよい. ■

明らかに $\|\exp A - E\| \leq e^{\|A\|} - 1$ であるから $\|A\| < \log 2$ ならば $\|\exp A - E\| < 1$ となる. ゆえに $\exp A$ は $\{A \in M(n, C) \mid \|A\| < \log 2\}$ の上では両側連続な A の関数になっている.

さて行列の各成分が t についての関数になっている場合を考える. たとえば $A(t) = (a_{ij}(t))$ の形のときである. この場合に $A(t)$ の t についての微分を普通と同じに次の式で定義する：

$$\frac{dA(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$

もちろん右辺が存在するときだけ微分が定義できるのである. 誤解の恐れがない場合には $\dfrac{dA(t)}{dt}$ のことを $A'(t)$ で表すことにする. 定義から直ちに明らかな様に $A'(t)$ は成分別に微分したものになっている. すなわち $A'(t) = (a_{ij}'(t))$ となっている. この式から微分についての式が簡単に計算される.

（i）　$$(aA(t) + bB(t))' = aA'(t) + bB'(t)$$

（ii）　$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

$$(\sum_k a_{ik}(t)b_{kj}(t))' = \sum_k a_{ik}'(t)b_{kj}(t) + \sum_k a_{ik}(t)b_{kj}'(t)$$

(iii)
$$(A(t)^{-1})' = -A(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}$$

ここで $A(t)$ の各成分は微分可能と仮定している．ところで $A(t)^{-1}$ のすべての成分は $A(t)$ の成分の有理関数で表される．しかも $A(t)^{-1}$ が存在するということは分母が 0 でないことを意味するから $(A(t)^{-1})'$ は存在する．このうえで次の計算から明らかである：

$$0 = (A(t)^{-1}A(t))' = (A(t)^{-1})'A(t) + A(t)^{-1}A'(t)$$

(iv)
$$(\exp At)' = A\exp At = (\exp At)A$$

$$\exp At = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$$

の右辺の各成分は一様収束するから項別に微分すればよい．したがって次の式が成立する：

$$(\exp At)' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}t^k}{k!} = A\exp At = (\exp At)A$$

いま $A \in M(n, \boldsymbol{C})$ とすれば，$f(t) = \exp(tA)$ は

$$f:\ \boldsymbol{R} \longrightarrow GL(n, \boldsymbol{C})$$

への連続関数であり，さらに微分可能であり次の条件をみたす：

$$f(s+t) = f(s)f(t).$$

この逆を証明する．

定理 10. $f: \boldsymbol{R} \to GL(n, \boldsymbol{C})$ が連続で次の条件をみたすものとする：

$$f(s+t) = f(s)f(t)$$

このとき f は $A \in M(n, \boldsymbol{C})$ を適当にとって

$$f(t) = \exp(tA)$$

と表すことができる．したがって f は微分可能である．しかもこの条件をみたす A はただ一通りに定まる．

［証明］一意性は $\exp(tA_1) = \exp(tA_2)$ とおけば両辺を t で微分して $t = 0$ とおけば $A_1 = A_2$ となるから明らかである．さて明らかに $f(0) = f(0)f(0)$ で $f(0) \in GL(n, \boldsymbol{C})$ であるから $f(0) = E$ がでる．したがって f は十分小さい $\varepsilon > 0$ をとれば，$|t| < \varepsilon$ なる t を $GL(n, \boldsymbol{C})$ の E の十分小さな近傍のなかにうつすことになる．

いま $GL(n, \boldsymbol{C})$ の E の十分小さな近傍と，$M(n, \boldsymbol{C})$ の 0 の十分小さな近傍をとれば，log と exp とは両者の間の連続で 1 対 1 で互いに逆になっている写像になっている．いまそのような十分小さな $GL(n, \boldsymbol{C})$ の E の近傍と，$M(n, \boldsymbol{C})$ の 0 の近傍をとり，この $GL(n, \boldsymbol{C})$ の E の近傍に，$|t| < \varepsilon$ なる $f(t)$ が入るように $\varepsilon > 0$ をとることにする．

いま $g(t)$ を次の式で定義する．もちろん $|t| < \varepsilon$ とする：

$$g(t) = \log f(t)$$

さて m を自然数とすれば，$|t|$，$|mt| < \varepsilon$ とすれば

$$g(mt) = \log f(mt) = \log(f(t))^m = m \log f(t) = mg(t)$$

が成立する．いま m, k を自然数で $|mt| < \varepsilon$ とすれば $kt' = t$ とおいて

$$g\left(\frac{m}{k}t\right) = g(mt') = mg(t') = \frac{m}{k}kg(t')$$

$$= \frac{m}{k}g(kt') = \frac{m}{k}g(t)$$

となる．また明らかに $g(-t) = -g(t)$ となるからすべての有理数 r に対して $|t|$，$|rt| < \varepsilon$ ならば

$$g(rt) = rg(t)$$

が成立する．ところで g は連続であるから，すべての実数 s に対して $|t|$，$|st|$ ならば

$$g(st) = sg(t)$$

が成立する．いま $0 < t_0 < \varepsilon$ として

$$A = \frac{1}{t_0}g(t_0)$$

とおくことにする．$|t| < \varepsilon$ とすれば

$$f(t) = f\left(\frac{t}{t_0}t_0\right) = \exp g\left(\frac{t}{t_0}t_0\right) = \exp\frac{t}{t_0}g(t_0) = \exp tA$$

となって証明が完了した．■

§2. 位相空間

この節では位相空間の常識を仮定する．位相空間の苦手な人はユークリッド空間の部分集合についての議論だと思って読んでいってあとは結果だけ用いるようにしてくれればよい．

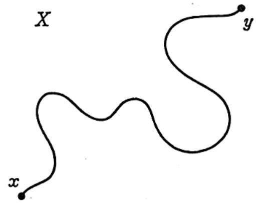
まず本書では x の近傍というのを x を含む開集合のこととする．

まず位相空間 X が弧状連結であるということを次の条件をみたすことと定義する：

　X の任意の2点 x, y をとるとき，$f: [0,1] \to X$ なる連続関数で $x = f(0)$ で $y = f(1)$ となるものが存在する．

ここで $[0,1]$ はもちろん0から1までの閉区間である．ここで $f: [0,1]$ を $x = f(0)$ を始点として，$y = f(1)$ を終点とする曲線という．または単に x と y とを結ぶ曲線という．

もう少し説明すれば X の2点 x, y をとるときに図の様に曲線で結べることを意味している．



さて例をあげれば R^n や C^n の2点はいつでも直線で結べるから弧状連結であることは明らかであろう．

次に X と Y とが弧状連結の場合には $X\times Y$ もやはり弧状連結になっている．これは $X\times Y$ の2点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) とをとったときに連続関数 $f_1:[0,1]\to X$ と $f_2:[0,1]\to Y$ で $f_1(0)=x_1$, $f_1(1)=x_2$, $f_2(0)=y_1$, $f_2(1)=y_2$ となっているものが存在するから

$$f(t) = (f_1(t),\ f_2(t))$$

によって $f:[0,1]\to X\times Y$ を定義すれば，f が (x_1, y_1) と (x_2, y_2) とを結びつける曲線になっていることは明らかであろう．

次に $SU(n)$ も弧状連結である．これは $U\in SU(n)$ としたときに U と E とを $SU(n)$ のなかで曲線で結びつけることをいえばよい．ところで U は次の形をしている：

$$U = U_0{}^*\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}U_0$$

ここに U_0 はユニタリー行列で $\lambda_1\cdots\lambda_n=1$ をみたすものとする．$\lambda_i=e^{\mu_i}$ とおいて $\mu_1+\cdots+\mu_i=0$ としてよい．このとき

$$U_t = U_0{}^*\begin{pmatrix} e^{t\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\mu_n} \end{pmatrix}U_0$$

とおけば U_t の全体 $(0\leq t\leq 1)$ がちょうど U と E とを結ぶ曲線になっている．

次に $SL(n, C)$ は弧状連結である．これは §1 で $SL(n, C)$ が位相空間としては $\mathfrak{P}$ を $SL(n, C)$ の正の定符号部分とするとき $SU(n)\times\mathfrak{P}$ と同相であることをいったから，そこで定義した $\mathfrak{P}$ が弧状連結であることをいえばよい．ところで $\mathfrak{P}$ の任意の元 P は

$$P = U_0{}^*\begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n} \end{pmatrix}U_0 \qquad \begin{array}{l} a_1,\ \cdots,\ a_n\in \boldsymbol{R}\ \text{で} \\ a_1+\cdots+a_n=0 \end{array}$$

の形で表される．ここに U_0 はユニタリーである．したがって P_t を次のように定義すれ

ばよい：

$$P_t = U_0{}^* \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n t} \end{pmatrix} U_0$$

次に $GL(n, \boldsymbol{C})$ も弧状連結である．これをみるために $A \in GL(n, \boldsymbol{C})$ として $A = re^{i\theta}A_0$ とおく．ここに $r > 0$ で $\theta \in \boldsymbol{R}$ とする．このとき $A_t = r_t e^{it\theta} A$ とおく．ここに r_t は $r_0 = 1$ で $r_1 = r$ をみたす t の連続関数ならばなんでもよい．こうしてできた A_0 は $SL(n, \boldsymbol{C})$ の元であり，$SL(n, \boldsymbol{C})$ は弧状連結だから A_1 は E と結べるから全体として $GL(n, \boldsymbol{C})$ が弧状連結であることがわかった．

いま X を位相空間とする．X が局所弧状連結であるということを，任意の X の元 x と x の任意の近傍 U をとったときに，$x \in V \subseteq U$ となる x の近傍 V で弧状連結なものが存在することをいう．

X が位相空間であって同時に群であって，群の演算が連続であるとき X を位相群という．X が位相群である場合には，X が局所弧状連結であることをいうためには任意の x をとらなくても，x を等位元 e と固定して，e の任意の近傍 U に対して $e \in V \subseteq U$ となる弧状連結な近傍 V がとれることをいえばよい．これは U が x の近傍であることと，$x^{-1}U$ が e の近傍であることは同等であり，さらに位相だけの上では U と $x^{-1}U$ とは同じものと考えられるからである．

X と Y とが局所弧状連結のときに，$X \times Y$ も局所弧状連結になっている．これは $(x, y) \in X \times Y$ として $x \in U \subseteq X$, $y \in V \subseteq Y$ において U と V とがそれぞれ弧状連結とすれば $U \times V$ が弧状連結になることから明らかである．

さて $SU(n)$ が局所弧状連結になることを証明しよう．このために $SU(n)$ の任意の元を次の形で表そう：

$$U_0{}^* \begin{pmatrix} r_1 e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n e^{i\theta_n} \end{pmatrix} U_0 \qquad \begin{matrix} r_1, \ \cdots, \ r_n > 0 & \prod_i r_i = 1 \\ \theta_1, \ \cdots, \ \theta_n \in \boldsymbol{R} & \sum_i \theta_i = 0 \end{matrix}$$

この形で表したとき $|\theta_i| < \varepsilon \ (i = 1, \ \cdots, \ n)$, $|1 - r_i| < \varepsilon \ (i = 1, \ \cdots, \ n)$ をみたす $SU(n)$ の元の全体を A_ε とおこう．A_ε は明らかに $SU(n)$ の E の近傍になっていて，どんな E の近傍をとっても ε を十分小さくすれば A_ε がその近傍の中に含まれるように

することができる（厳密な証明には $U_0{}^*EU_0=E$ と $U(n)$ がコンパクトであることを使え）．ところで前と同じように

$$U_0{}^*\begin{pmatrix} r_1{}^te^{it\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n{}^te^{it\theta_n} \end{pmatrix}U_0$$

を考えれば，t が1から0へと移る間に上の元は連続的に E に変化していく．ここで大切なことはこの1つの元だけではなくて A_ε 全体が連続的に縮まっていって1点 E になってしまうことである．

次に $SL(n,C)$ が局所弧状連結であることを証明する．このために $\mathfrak{P}$ を $SL(n,C)$ の正の定符号部分とする．$SL(n,C)$ の E の近傍は $SU(n)$ の E の近傍と $\mathfrak{P}$ の E の近傍の直積を含むから，$\mathfrak{P}$ の E の近傍だけを考えればよい．これは $SU(n)$ の場合と同じく $\mathfrak{P}$ の任意の元 P を次の形で表したとき

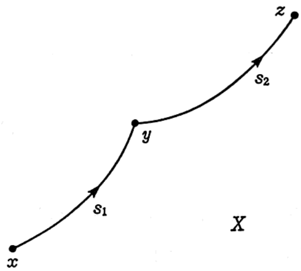
$$P=U_0{}^*\begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n} \end{pmatrix}U_0 \qquad \begin{array}{l} a_1,\ \cdots,\ a_n\in \boldsymbol{R}\text{ で} \\ a_1+\cdots+a_n=0 \end{array}$$

$|a_1|,\ \cdots,\ |a_n|<\varepsilon$ となるものの全体を B_ε とするとき，B_ε は $\mathfrak{P}$ における E の近傍になっており，どんな小さな E の近傍をとっても，ε を十分小さくすれば B_ε はその近傍のなかに入ってしまう．前と同じく P_t を定義すればこれは t が1から0にいくに従って B_ε を連続的に $B_{\varepsilon t}$ に縮めていって最後には E 1点にしてしまうことは明らかである．このことから $A_\varepsilon\times B_\varepsilon$ を考えれば $SL(n,C)$ の E のどれだけでも小さい近傍で E を固定した連続的変形で E 1点に縮めることができるものが存在することがわかる．

最後に $GL(n,C)$ について同様なことをする．任意の $GL(n,C)$ の元を $re^{i\theta}A$ とかいて $r>0$, $\theta\in\boldsymbol{R}$, $A\in SL(n,C)$ とする．いま C_ε を $|1-r|<\varepsilon$, $|\theta|<\varepsilon$ で $A\in A_\varepsilon\times B_\varepsilon$ に入る全体とする．このとき A_t を $r^te^{i\theta t}A_t$ として A_t を上にのべた $SL(n,C)$ のなかの E に縮めていく操作とすれば，$GL(n,C)$ においてもいくらでも小さい近傍で E を固定しながら E に縮めていく連続的変形をもったものがあることがわかる．

ここであとで用いるために1つ注意を加えることにする．上の B_ε を1点に縮める操作は実は $\mathfrak{P}$ 自身に定義することができる．すなわち $\mathfrak{P}$ 自身が E を固定して連続的に縮めて1点 E にすることができる．実際にこれが $\mathfrak{P}$ が弧状連結であることを証明した方法であった．

さて今後この節で考える位相空間 X はすべて弧状連結で局所弧状連結であるものとする．



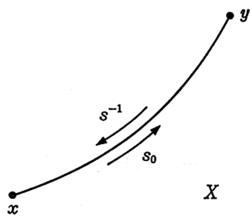
いま $s_1:[0,1]\to X$, $s_2:[0,1]\to X$ と2つの曲線を考えることにする．いまこれに s_1 の終点と s_2 の始点とが同じであったとする．すなわち

$$s_1(1)=s_2(0)$$

であったとする．このとき $s_2\circ s_1$ を次の $s:[0,1]\to X$ と定義する：

$$s(t)=\begin{cases} s_1(2t) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2} \\ s_2(2t-1) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

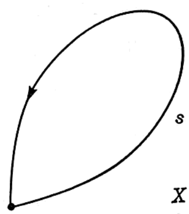
いま s_1 は x を始点として y を終点とし，s_2 は y を始点として z を終点とするとき，s は x を始点として z を終点とする曲線になっている．



次に $s:[0,1]\to X$ が x を始点として，y を終点とする曲線であるとき，$s^{-1}:[0,1]\to X$ を次の式で定義する：

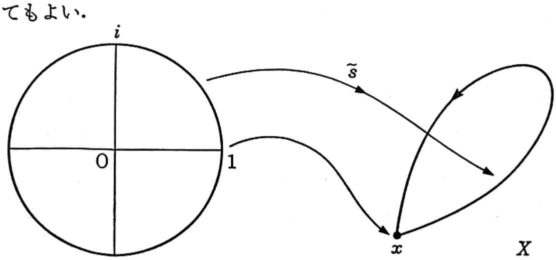
$$s^{-1}(t)=s(1-t)$$

図でみるように s^{-1} は y から x への s と逆向きの曲線になっている．

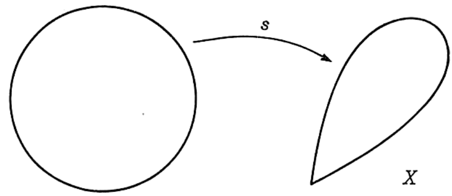


いま曲線 $s:[0,1]\to X$ の始点と終点とが同じであるとき，すなわち $s(0)=s(1)$ であるとき s のことをループという．または正確には x を基点とするループという．

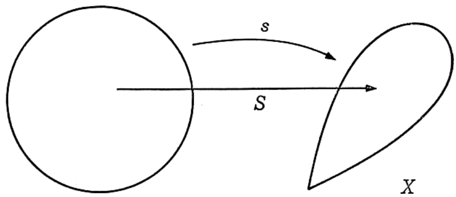
x を基点とするループは次のように複素平面の上の単位円上の連続関数と考えてもよい．



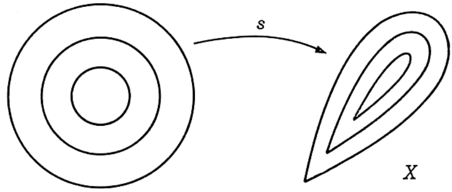
ここに $\tilde{s}$ を $\tilde{s}(e^{2\pi i\theta})=s(\theta)$ によって定義するのである．したがってループは平面上の円の1点とその向きとを固定したうえで，円から X への連続写像と思えばよい．



いま s をループとして，このように円の上で定義されたものとする．このときこの連続写像 s が円の内部を含めた連続写像 S に拡大できるとき，もとのループ s は0にホモトープであるという．

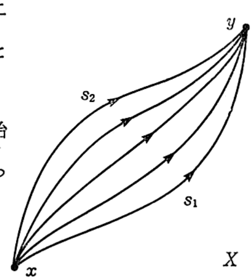


s がホモトープであるということは，図のように円の内部に1点に縮まっていく同心円を考えれば，ループ s が X のなかで連続的に変形していって1点になることと思えばよい．



次に曲線 s_1, s_2 が共に x を始点として y を終点とする曲線とする．このとき $s_2^{-1}s_1$ は明らかに x を基点とするループになっている．このループが0にホモトープのとき s_1 と s_2 とはホモトープといって $s_1 \sim s_2$ とかくことにする．

これは前の図をかいてみれば明らかなように X のなかで始点 x と終点 y とを固定しながら s_1 を連続的に変形していって s_2 にすることができることを意味している．



このことから曲線 s, s', s'' について次のことは明らかである：

$$s \sim s$$

$$s \sim s' \implies s' \sim s$$

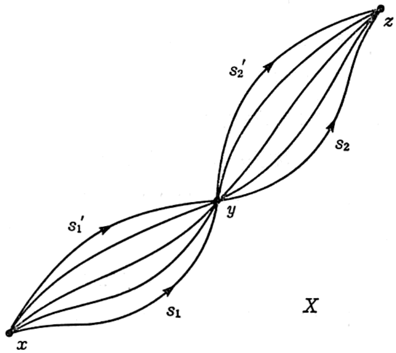
$$s \sim s',\ s' \sim s'' \implies s \sim s''$$

$$s \sim s' \implies s^{-1} \sim (s')^{-1}$$

さらに s_1, s_1' が x を始点として y を終点とし, s_2, s_2' が y を始点として z を終点とするとき

$$s_1 \sim s_1',\ s_2 \sim s_2' \Longrightarrow s_2 \circ s_1 \sim s_2' \circ s_1'$$

は図のように明らかである.



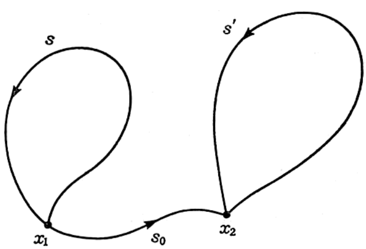
したがって X の1点 x を固定して, x を基点とするループの全体を考えれば～で同等のものを同じものと考えたうえでループの全体は群をなしていることがわかる.

この群を X の基本群というのである.

この基本群の単位元は x の点を全く動かないループになっている. すなわち $s_0: [0,1] \to X$ で $s_0(t)=x$ がすべての t $(0 \leq t \leq 1)$ についてみたされている s_0 で表される元である. ここで細かいことをいえば～によって同値関係を考えることによって初めて群になる. すなわち s_1, s_2, s_3 を x を基点とするループとするとき

$$(s_1 \circ s_2) \circ s_3 \sim s_1 \circ (s_2 \circ s_3) \quad \text{であるが} \quad (s_1 \circ s_2) \circ s_3 \neq s_1 \circ (s_2 \circ s_3)$$

となるような s_1, s_2, s_3 は容易にみつかるから＝ではちょっと具合が悪いのである.



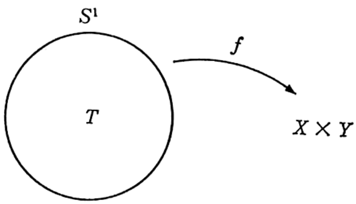
さて基本群の定義で X の1点 x を固定したのであるが, 基本群は x_1, x_2 と異なった基点をとっても同型になるという意味で x のとり方には依存しない. これは x_1, x_2 と異なった基点を2つとったときに x_1 から x_2 に到る曲線を1つ s_0 とすれば, x_2 からのループ s' には $s_0^{-1}s's_0$ を対応させれば, これは x_1 からのループになるし, また x_1 からの1つのループ s には $s_0 \circ s \circ s_0^{-1}$ を対応させればこれは x_2 からの1つのループになっている. しかもこの2つの対応は～の意味で（＝の意味ではない）互いに相手の逆な対応になっているから, X の基本群としては x_1 をとっても x_2 をとっても同型のものがでてくることがわかる.

さて X の基本群が0のとき，すなわち X のすべてのループが0にホモトープのときに X は単連結であるという．明らかにわかるように X 自身が連続的な変形によって1点に縮めることができればもちろんループも1点に縮まるわけであるから単連結である．このことから $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}^n$, また $SL(n,\boldsymbol{C})$ の正の定符号部分 $\mathcal{P}$ が単連結であることがわかる．

もし X と Y とが単連結とすると $X\times Y$ も単連結になっている．これは

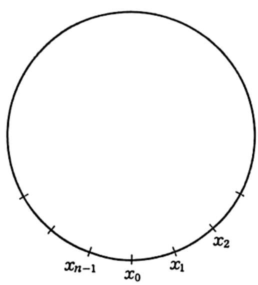
$$f:\quad S^1 \longrightarrow X\times Y$$

が連結とすると f は $f_1: S^1\to X$ と $f_2: S^1\to Y$ との直積の形になっている．すなわち $f=f_1\times f_2$ となっている．X と Y とは共に単連結であるから f_1 と f_2 とはそれぞれ S^1 の内部 T にまで拡大することができる．これを g_1 と g_2 とすれば $g=g_1\times g_2$ は f を T まで拡大したものになっている．すなわち f は0にホモトープである．



さて n 次元の球面を S^n とかくことにする．したがって S^1 は円になっている．いま S^n の基本群を計算することにする．

まず S^1 を考える．この基本群を考えるためには S^1 の1点 x_0 を固定して $s: S^1\to S$ で $s(x_0)=x_0$ となる連続関数 s について考えればよい．ところで s は一様連続であるから S^1 を n 個の長さの等しい弧に分割してその弧と端の点を順番に $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n=x_0$ とすれば弧 $\widehat{x_ix_{i+1}}$ の s による像は円の半径に比べて極めて少ししか動かないようにできる．このとき $s(x_0),\ s(x_1),\ s(x_2),\ \cdots,\ s(x_n)$ と順々に円の上を動いていくと全部終ったときにはそれは円の上を何回かまわったことになっている．もしもとの円と同じ方向に m 回まわったときには m，また逆の方向に m 回まわったときには $-m$ を対応させると s に対して1つの整数を対応させたことになる．この整数はぐるぐると何回まわったかを表す数になっている．しかもこの整数は $s(\widehat{x_ix_{i+1}})$ が半径に対して極めて小さいという条件をつけておけば $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ のとり方によらないことは，別のとり方を $y_0=x_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_l=y_0$ としたときに $\widehat{x_ix_{i+1}}$ の近くの $\widehat{y_jy_{j+1}}$ をとるときには $s(\widehat{x_ix_{i+1}})$ と $s(\widehat{y_jy_{j+1}})$ とがほとん



ど同じ場所にあることから明らかである.

この整数を s の回転数と呼ぶことにする. このとき $s \sim s'$ とすれば s の回転数と s' の回転数とは一致する. これは s が s' にホモトープになるときは s から s' へ連続的に移っていくわけであるから $s, s_1, s_2, \cdots, s_m = s'$ とたくさんの s_i をとれば s_i と s_{i+1} とは円の半径に比べてほんのわずかな距離しか動かないようにできる. このとき s_i と s_{i+1} の回転数が等しいことは上の議論と全く同じように証明される.

以上によって S^1 の基本群が $\boldsymbol{Z}$ と同型になることがわかった (s の回転数が m で s' の回転数が m' のときに $s' \cdot s$ の回転数が $m + m'$ になることは明らかであろう.).

次に $S^n(n > 1)$ の基本群を考えることにしよう. 結果は 0 である. すなわち S^n の上のすべてのループは 0 にホモトープになっている. これをみるために $s: S^1 \to S^n$ とする. 前にいったように s を十分細かく分割して $x_0, x_1, \cdots, x_n = x_0$ とすれば曲線 s は $s(x_0) \cdot s(x_1) \cdots s(x_n)$ とホモトープになっている. ここに $s(x_i)s(x_{i+1})$ は 2 点 $s(x_i)$ と $s(x_{i+1})$ を S^n の上で結ぶ距離が最小の曲線とする. $n > 1$ であるからこうしてできた曲線 s' の上にない S^n の点 y が存在する. ところで $S^n - \{y\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ と位相空間として同相であり, $\boldsymbol{R}^n$ は連続的に 1 点に縮めることができるから s' も連続的に 1 点に縮めることができる. したがって s' は 0 にホモトープであり, これから s が 0 にホモトープのことがわかる.

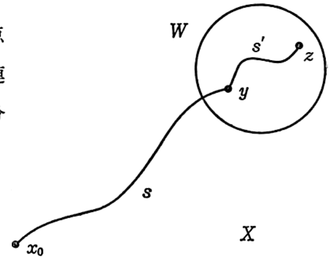
次に位相空間 X が局所単連結であるということを, X の任意の点 x とその近傍 U とをとったときに, $x \in V \subseteq U$ となる近傍 V で弧状連結で単連結なものが存在することと定義する.

$SU(n)$, $SL(n, \boldsymbol{C})$, $GL(n, \boldsymbol{C})$ はすべて小さい近傍をとると 1 点に縮めることができるので局所単連結である.

以下この節の議論では, 位相空間はすべて弧状連結で局所単連結なものとする.

さて X はそのような位相空間で, x_0 をその 1 点とする. このとき x_0 を始点とする曲線の全体を $\sim$ で類別したものを $\tilde{X}$ とする. すなわち $\tilde{X}$ の元は x_0 を始点とする曲線 s だと思ってよいが, s と s' の終点が同じで, $s \sim s'$ のときは, $\tilde{X}$ の元としては s と s' とは同じ元を表すものとする. 正確には s は $\tilde{X}$ の元の 1 つの代表元であるが, s が $\tilde{X}$ の元自身のように取り扱うことにする.

いま $\tilde{X}$ に位相を定義する. 一般に $\tilde{X}$ の位相を定義するためには, $\tilde{X}$ の部分集合 $\tilde{U}$ が $\tilde{X}$ の基本開集合であるということを定義して, 任意の $\tilde{X}$ の開集合を基本開集合の和集合で表される集合であると定義すればよい.



この方法にしたがって $\tilde{X}$ の任意の点を s とする，すなわち s は x_0 を始点とする曲線である．s の終点を y とする．y の X での近傍 W で弧状連結で単連結になっているものを1つとる．このとき $\tilde{X}$ の部分集合 $\tilde{W}$ を次の式で定義する：

$$\tilde{W} = \left\{ s' \circ s \,\middle|\, \begin{array}{l} s' \text{ は } y \text{ を始点とするすべての点} \\ \text{が } W \text{ のなかに入っている曲線} \end{array} \right\}$$

この様な形で表される $\tilde{W}$ を $\tilde{X}$ の基本開集合と考えることにする．

このとき $\tilde{W}$ の点は s' の終点を z とすれば z だけで定まってしまう．すなわち s'：$[0,1] \to W$，s''：$[0,1] \to W$ で $s'(0) = s''(0) = y$，$s'(1) = s''(1) = z$ とすれば W が単連結のことから $s' \sim s''$ したがって $s' \circ s \sim s'' \circ s$ となり $s' \circ s$ と $s'' \circ s$ とが $\tilde{X}$ の同じ元を表すことから明らかである．

さらにこの議論は $\tilde{X}$ の開集合 $\tilde{W}$ と X の開集合 W とが位相空間として全く同相の位相空間になっていることを示している．

このようにしてできた $\tilde{X}$ に対して p：$\tilde{X} \to X$ を次の式で定義する．ここに $s \in \tilde{X}$ とする：

$$p(s) = s(1) = (s \text{ の終点})$$

このとき $\tilde{X}$ と p との組を X の普遍被覆空間という．普遍被覆空間は次の著しい性質をもっている．

定理 1. $(\tilde{X}, p)$ を X の x_0 を基点とする普遍被覆空間とするとき，次の性質が成立する：

（i） p：$\tilde{X} \to X$ は連続で開写像である．ここに開写像とはすべての $\tilde{X}$ の開集合 $\tilde{U}$ に対して $p(\tilde{U})$ が X の開集合になることをいう．

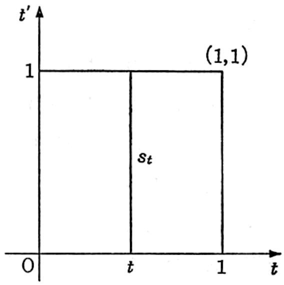
（ii） $s \in \tilde{X}$ として $p(s) = y$ とするとき，y の近傍 W と f：$W \to \tilde{X}$ となる連続関数 f で $pf(z) = z$ $(z \in W)$ となるものが存在する．

(iii) $\tilde{X}$ は連結で単連結である．

［証 明］ まず（ii）は W を上の $\tilde{W}$ を定義したときの W ととる．W の任意の点 z に対して，W のなかで y と z とを結ぶ曲線を s' とすれば，前にのべたように $s' \circ s$ は z だけに定まって s' のとり方によらない．したがって $s' \circ s$ を $f(z)$ と定義すれば f：

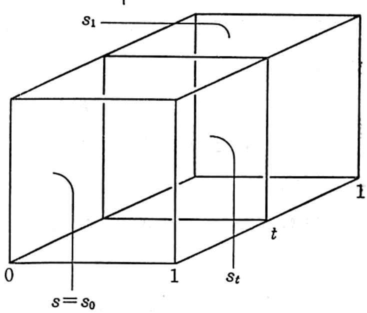
$W \to \tilde{W}$ となる．ここで $\tilde{W}$ は前に定義したものである．ここで f が連続であること $pf(z) = z$ は明らかである．ところでこの $\tilde{W}$ は $\tilde{X}$ の開集合であるから p が連続であることは明らかである（すなわち $p^{-1}(W)$ が開集合になっている.)．p が開写像であることも $\tilde{X}$ の基本開集合 $\tilde{W}$ に対して $p(\tilde{W}) = W$ が X の開集合であることから明らかである．

さて次に (iii) を証明する．いま $\tilde{X}$ の元 $\tilde{x}_0$ を，$\tilde{x}_0 : [0,1] \to X$ で $\tilde{x}_0(t) = x_0$ と x_0 を全く動かないループとする．$\tilde{x}_0$ を $\tilde{X}$ の基点とすれば，もちろん $p(\tilde{x}_0) = x_0$ となっている．いま $\tilde{s} : [0,1] \to \tilde{X}$ を $\tilde{x}_0$ を基点とする $\tilde{X}$ のループとする．



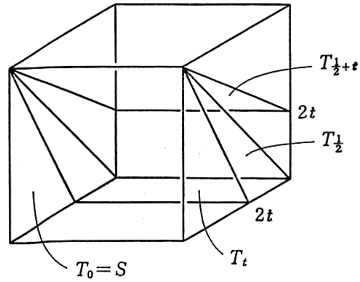
いま $\tilde{s}(t) = s_t$ とおけば $s_t \in \tilde{X}$ すなわち $s_t : [0,1] \to X$ になっている．s_t は関数の形であるから $s_t(t')$ の形になっている．$S(t,t') = s_t(t')$ と S を2変数の関数とすれば図のようになっていて，右の図の四角形で t' 軸，t 軸および (1,0) から (1,1) までの線分のところでは S の値は x_0 になっている．

このような $\tilde{X}$ のループ $\tilde{s}$ と上の条件をみたす2変数の関数 $S(t,t')$ とは1対1に対応する．すなわち上の条件をみたす $S(t,t') = s_t(t')$ が与えられれば $\tilde{s}(t) = s_t$ と定義すれば $\tilde{s}$ は $\tilde{X}$ の上のループになっている．したがって上の条件をみたす2変数の関数 S の連続的変形 S_t で $S_0 = S$，S_1 の値は x_0 だけという S_t を定義すればよい．



ここで $S = S_0$ のところと立方体の上の正方形以下の立方体の側面はすべて S_t によって x_0 に写像される．

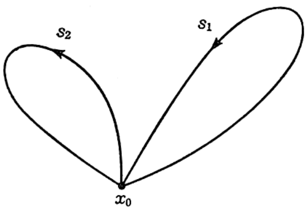
このように立方体の内部をうめることは次の方法によって簡単に作られるから $\tilde{X}$ が単連結であることがわかった．



この図において T_t は S と同じものを斜めに引き延ばしてできたものである．■

この定理における（i）と（ii）の条件をしばしば $\tilde{X}$ は X と局所同相であると表現する．

さて基本群は一般には可換でない．これは X として図の様な2つの輪からできているものを考えて，1つの輪を1回転する基本群の元を s_1，もう1つの輪を1回転する元を s_2 とすれば，s_2s_1 と s_1s_2 とはホモトープにはならないことは明らかであろう．実際にこの図形の基本群は s_1 と s_2 とから生成された自由群になっている．しかし位相群の基本群はあとでわかるように可換群になっている．



まず位相群について二，三の常識をのべることにする．いま G が位相群で H がその閉部分群とする．このとき G/H は集合としては普通に $\{gH|g\in G\}$ と定義する．ここでもちろん $gH=\{gh|h\in H\}$ という集合になっている．

いま $\tilde{W}\subseteq G/H$ とするとき，$\tilde{W}$ が G/H の開集合であるということを次の条件がみたされていることと定義する：

$$p^{-1}(\tilde{W})=\{gh|h\in H \text{ で } gH\in\tilde{W}\} \text{ が } G \text{ の開集合である．}$$

この定義によって G/H は位相空間になる．いま $p:G\to G/H$ を $p(g)=gH$ によって定義すれば G/H の位相の定義から p が連続であることがわかる．（$p^{-1}(\tilde{W})$ は上の定義より開集合）．さらに p は開写像になっている．これをみるために U を G の開集合とすれば，

$$p(U)=\{uH|u\in U\}$$

が G/H の開集合になることをいえばよい．ところでこのためには $p^{-1}p(U)$ が G の開集合になっていることをいえばよい．ところで $p^{-1}p(U)=\bigcup_{h\in H}Uh$ であって Uh は G の開集合であるから明らかである．

p が連続であることから G が弧状連結ならば G/H も弧状連結になることは明らかである．

さて N を G の閉正規部分群とすれば G/N は群である．さらに上の方法で G/N に位相を与えれば，容易にわかるように G/N は位相群になっている．この場合 $p:G\to G/N$ は群の準同型写像になっている．しかも p は連続で開写像である．

逆に2つの位相群 G_1，G_2 があったときに $h:G_1\to G_2$ を連続で開写像とする．このと

き $N=h^{-1}(e)$ と定義する．ここに e は G_2 の単位元とする．明らかに N は G_1 の正規部分群であるが，$\{e\}$ が閉集合であるから N は G_1 の閉部分群になっている．このとき

$$h_1:\quad G_1/N \longrightarrow G_2$$

を $h_1(gN)=h(g)$ によって定義すれば，h_1 は1対1で G_2 の上への写像であることは群論から明らかであるが，h が連続であることから，G_2 の開集合 U に対して $h_1^{-1}(U)$ は G_1 の開集合になって h_1 が連続であることがわかり，また h が開写像であることから h_1 も開写像であることは明らかであるから h_1 が両連続な同型写像であることがわかる．すなわち G_1/N と G_2 とは位相群として全く同じものと思ってよい．

さて $SU(n-1)$ の任意の元 A に対して $\tilde{A}$ を次の形の行列とする：

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

このとき $\tilde{A}\in SU(n)$ となる．この方法によって $SU(n-1)$ を $SU(n)$ に埋め込むことによって，$SU(n-1)$ を $SU(n)$ の閉部分群と考えてよい．いま $SU(n)/SU(n-1)$ が位相空間として S^{2n-1} に同相になっていることを証明する．

いま C^n の元 e_1 を次のベクトルとする：

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

さらに $U\in SU(n)$ として，　$Ue_1=e_1$ とすれば $U=(u_{ij})$ として計算すれば

$$u_{11}=1$$
$$u_{i1}=0 \qquad i>1$$

がでてくる．ところで $\sum_i|u_{1i}|^2=1$ となるから $u_{1i}=0$ $(i>1)$ もでてくる．したがって $Ue_1=e_1$ と $U\in SU(n-1)$ とは同等の条件であることがわかる．ところで C^n の長さが1の任意のベクトル v_1 をとれば v_2, …, v_n を適当にとることによって v_1, v_2, …, v_n が正規直交系であるようにすることができる．いま $Ue_1=v_1$, …, $Ue_n=v_n$ によって U を定義すれば $U\in U(n)$ となる．必要ならば $v_n'=e^{i\theta}v_n$ を新しく v_n と書き直すことによって $U\in SU(n)$ としてよい．したがってすべての長さが1の C^n のベクトルは Ue_1, $U\in SU(n)$ の形にかけているとしてよい．いま2つの U_1, U_2 があって

$U_1e_1 = U_2e_1$ とすれば $U_1^{-1}U_2e_1 = e_1$ したがって $U_1^{-1}U_2 \in SU(n-1)$ となりしたがって $U_2 \in U_1SU(n-1)$ となる．すなわち U_1 と U_2 とは $SU(n)/SU(n-1)$ の同じ剰余類に入っている．ところで C^n のなかの長さが1のベクトルの全体は S^{2n-1} となるから，$SU(n)/SU(n-1)$ から S^{2n-1} の上への1対1の対応が得られた．$SU(n)$ が e_1 に作用する仕方は連続であるから，この $SU(n)/SU(n-1)$ から S^{2n-1} への写像は連続である．ところで $SU(n)$ はコンパクトであるからその連続写像の $SU(n)/SU(n-1)$ もコンパクトである．したがって $SU(n)/SU(n-1)$ から S^{2n-1} の上への1対1の連続写像は位相同型の写像になっている．このことから $SU(n)/SU(n-1)$ が $n>1$ のときは単連結であることがわかる．

さて次に本節の一番大切な話題に入ることにする．いま G を連結で局所単連結な位相群とする．このとき G の普遍被覆空間 $\tilde{G}$ を作れば $\tilde{G}$ はもちろん単連結になっている．$\tilde{G}$ を作るとき我々は，常に G の単位元を $\tilde{G}$ を作るときの基点に選ぶものとする．このとき $\tilde{G}$ を同時に位相群にすることができる．

このために $s \in \tilde{G}$ とする．すなわち $s:[0,1] \to G$ であって $s(0) = e$ は G の単位元とする．いま $s_1, s_2 \in \tilde{G}$ とするこのとき $s_1 \circ s_2$ とは異なった新しい演算 $s_1 \cdot s_2$ を次のように定義する：

$$(s_1 \cdot s_2)(t) = s_1(t) \cdot s_2(t) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

ここに右辺の・はもちろん G の乗法を表す．同様にして -1 とは異なった -1 を次のものと定義する：

$$(s^{-1})(t) = (s(t))^{-1}$$

ここに右辺の -1 はもちろん G の逆を表す．このとき・と -1 とは $\tilde{G}$ の上の演算になっている．すなわち

$$s_1 \sim s_1',\ s_2 \sim s_2' \implies s_1 \cdot s_2 \sim s_1' \cdot s_2'$$
$$s \sim s' \implies s^{-1} \sim (s')^{-1}$$

ところで $\tilde{G}$ の単位元 $\tilde{e}$ の近傍 $\tilde{U}$ は作り方から，G の e の近傍 U と全く同じものと考えてよい．したがって $\tilde{G}$ が $\tilde{e}$，・，-1 に関して位相群になっていることは明らかである．この位相群 $\tilde{G}$ を G の普遍被覆群という．このとき $p:\tilde{G} \to G$ が連続で開写像になる準同型になっていることは明らかであろう．

さてここで位相群 G の基本群が可換になっていることを証明しよう．このために s_1, s_2

を G のループとする．もちろん基点は G の単位元 e であるとする．このとき $s_1 \sim s_1'$, $s_2 \sim s_2'$ となる s_1', s_2' を上手にとって次の条件がみたされているようにできる：

$$s_1'(t) = e \qquad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$$s_2'(t) = e \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

このとき次の式は明らかである：

$$s_2 \circ s_1 \sim s_1' \cdot s_2'$$

また同様に $s_1 \sim s_1''$, $s_2 \sim s_2''$ となる s_1'', s_2'' を上手にとって次の条件がみたされているようにできる：

$$s_1''(t) = e \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$s_2''(t) = e \qquad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

このとき $s_1'' \cdot s_2'' \sim s_1 \circ s_2$ がわかる．以上によって $s_1 \circ s_2 \sim s_2 \circ s_1$ であることがわかり，G の基本群が可換であることがわかった．

次の定理は本節で一番大切な定理である．

定理 2. G と G' とは弧状連結な位相群であって，G は局所単連結で単連結とする．いま U は G の単位元 e の局所単連結な近傍であって $f: U \to G'$ は連続な局所準同型であるとする．すなわち次の条件がみたされている：

$$x, y,\ xy \in U \implies f(xy) = f(x)f(y)$$
$$x, x^{-1} \in U \implies f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$$

このとき f は G から G' への連続準同型写像 φ に一意的に拡大することができる．

もし f がさらに開写像したがって，e の近傍 $V \subseteq U$ を G' の単位元の近傍に写像するものとすれば，上のように拡大された φ は G から G' の上への開写像となる．G' が局所単連結，単連結でさらに f が局所同型ならば φ は G から G' の上への同型写像（代数同型で位相同型）になっている．

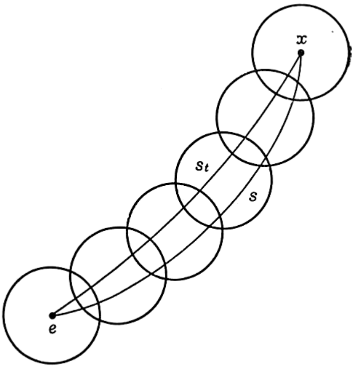
［証明］ まず e の近傍 V を十分小さくとって

$$V^{-1} \cdot V \subseteq U \quad \text{で}\ V\ \text{は単連結}$$

がみたされているものとする．ここに $V^{-1} \cdot V$ は

$$V^{-1} \cdot V = \{v_1^{-1} \cdot v_2 \mid v_1, v_2 \in V\}$$

を意味する．



このとき G の元 x に対して，e から x への曲線を1つとり，この曲線を有限個の V_{x_0}, V_{x_1}, …, V_{x_n} で覆うことができる．ここで $x_0=e$, $x_n=x$ とする．いま $V_{x_i}\cap V_{x_{i+1}}$ の点をとってきて

$$v_1x_i=v_2x_{i+1}$$

とする．このとき

$$x_{i+1}=v_2^{-1}v_1x_i \qquad \text{すなわち}$$

$$x_{i+1}=u_{i+1}x_i, \qquad u_{i+1}\in U$$

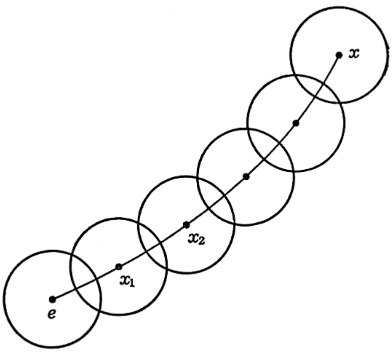
とかくことができる．これを繰り返すと

$$x=u_nu_{n-1}\cdots u_1$$

と x は U の元の積で表される．いま φ が f の拡大とすれば $\varphi(x)$ の定義は一意的に定まって

$$\varphi(x)=f(u_n)f(u_{n-1})\cdots f(u_1)$$

となる．この $\varphi(x)$ が s のとり方 x_1, …, x_n のとり方に依存しないことをいう．

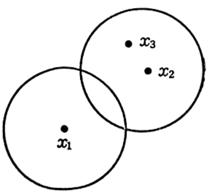


このため e から x への別の曲線 s' をとってくる．G は単連結であるから s から s' への連続的変化 s_t が存在する．ここに $s=s_0$, $s'=s_1$ とする．

いま t が十分小さいときには右の図の様に s と s_t とが同じ V_{x_i} で覆われているようにできる．

このとき次のような状態を考えれば

$$x_3=v_3x_2, \qquad v_1x_1=v_2x_2, \qquad v_1'x_1=v_2'x_3$$



となる．v_1, v_2, v_1', v_2', $v_3\in V$ が存在すると思ってよい．

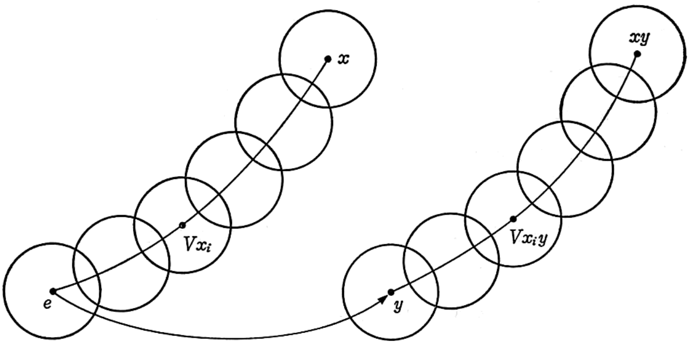
このとき $v_2'^{-1}v_1^1=u'$, $v_2^{-1}v_1=u$ として

$$\varphi(x_3)=\varphi(u'x_1)=f(u')\varphi(x_1),$$

$$\varphi(x_2)=\varphi(ux_1)=f(u)\varphi(x_1)$$

したがって $\varphi'(x_3)=\varphi(v_3x_2)=f(v_3)f(u)\varphi(x_1)$ と $\varphi(x_3)$ と $\varphi'(x_3)$ とが別な方法で定義されたとすれば $u'=v_3u$ から $f(u')=f(v_3)f(u)$ となるからこの2つの方法での定義が一致することがわかる.

この方法を繰り返すことによって, s と s_t とのとり方に依存することなしに $\varphi(x)$ の値が等しいことがわかる. ところで s' は極く小さい連続的変形を繰り返して得られるから s と s' とのとり方に φ の定義が依存しないことがわかる.



次に φ が代数的に準同型であることは上の図から明らかである. 厳密な証明もほとんど明らかである.

連続という性質は局所的な性質であるから φ は局所的には f を移動したものにすぎないから φ が連続であることは明らかである.

さらに f が開写像とすれば $f(V)$ は G' の単位元 e' の近傍になるから φ が開写像であることは明らかである. さらに G' は弧状連結であるから G' の任意の元 x' をとれば e' と x' とを結ぶ曲線 s' が存在する. ところで $f(V)$ は e' の近傍であるから s' は $f(V)x_i'$ の形の有限個の開集合で覆われる. このことから x' が φ の像になっていることは明らかである. すなわち φ は G から G' の上への開写像で連続な準同型になっている.

f が局所同型ならばもちろん f は開写像で連続になるから φ が開写像のことは明らかである. 最後に f が局所同型で G' が局所単連結で単連結とすれば f^{-1} は G' から G への局所同型写像になっているから, f^{-1} は G' から G の上への連続写像 ψ に拡大できる. 作り方から φ と ψ とが互いに逆になっていることは明らかであるから, φ が位相的

にも代数的にも G から G' の上への同型写像になっていることは明らかである. ∎

この定理の応用として次の定理を証明する.

定理 3. G は弧状連結, 局所単連結な位相群で, H はその閉部分群で弧状連結, 局所単連結でさらに単連結とする. いま G/H が局所単連結で単連結ならば G も単連結である.

［証明］ G が弧状連結だから G/H も弧状連結である. 次に G の普遍被覆群を $\tilde{G}$ とする. このとき H が単連結であるから H に対応する $\tilde{G}$ の部分集合を $\tilde{H}$ とすれば $\tilde{H}$ は H と位相的に代数的に同型となっている. $\tilde{G}$ から G の上への局所同型写像を p とすれば p は $\tilde{H}$ を H に位相的に代数的に同型に移す.

$$\begin{array}{ccc} G & \xleftarrow{\ p\ } & \tilde{G} \\ | & & | \\ H & \xleftarrow{\ p\ } & \tilde{H} \end{array}$$

これから右の図が成立するから p から導かれる

$$p_0 : \tilde{G}/\tilde{H} \longrightarrow G/H$$

を作れば p_0 は G/H の上への局所同型な準同型になっている. ところで G/H は単連結であるから G/H の単位元の近傍で定義された p_0^{-1} は G/H から $\tilde{G}/\tilde{H}$ の上への開連続な準同型に拡大できる. このように拡大された写像は明らかに p_0 の逆写像になっているから $\tilde{G}/\tilde{H}$ と G/H とは位相的代数的に同型であることがわかった. ところで p は $\tilde{H}$ の上で同型写像であるからこれは p が $\tilde{G}$ から G への同型写像であることがわかり $\tilde{G}=G$ となり G が単連結であることがわかった. ∎

系 $n>1$ とすれば $SU(n)$ と $SL(n,C)$ は単連結である.

［証明］ $SU(n)/SU(n-1)$ が S^{2n-1} に同相なことと, 定理から $SU(n)$ が単連結であることをいうためには $SU(2)$ が単連結のことをいえば十分である. いま $A\in SU(2)$ とすれば A の次の形になっている.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

いま $\alpha=x_0+x_1i$, $\beta=x_2+x_3i$ とおけば, $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ の条件は $x_0{}^2+x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=1$ と同等になるから $SU(2)$ は位相的には S^3 と同相になっている. したがって単連結である.

次に $SL(n,C)$ は位相的には $SU(n)\times\mathfrak{P}$ と同相である. ここに $\mathfrak{P}$ は $SL(n,C)$ の正の定符号部分とする. $SU(n)$ も $\mathfrak{P}$ も単連結であるから $SL(n,C)$ は単連結になる. ∎

§3. 線形リー群とリー代数

$GL(n,\boldsymbol{C})$ の閉部分群を線形リー群という．したがって $GL(n,\boldsymbol{C})$ 自身および $SL(n,\boldsymbol{C})$，$U(n)$，$SU(n)$ はすべて線形リー群である．

G を線形リー群とするとき，すべての実数 t について，次の式を満足する $A\in M(n,\boldsymbol{C})$ の全体を G のリー代数という：

$$\exp(tA)\in G$$

$GL(n,\boldsymbol{C})$ のリー代数を $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})$，$SL(n,\boldsymbol{C})$ のリー代数を $\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})$，$U(n)$ のリー代数を $\mathfrak{u}(n)$，$SU(n)$ のリー代数を $\mathfrak{su}(n)$ で表す．

まず $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})$ を考えれば，すべての $A\in M(n,\boldsymbol{C})$ について $\exp(tA)\in GL(n,\boldsymbol{C})$ であるから $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})$ は $M(n,\boldsymbol{C})$ に等しい．$M(n,\boldsymbol{C})$ 以外に $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})$ を用いる意味についてはあとでのべる．

次に $\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})$ を考えれば

$$\begin{aligned}\exp(tA)\in SL(n,\boldsymbol{C}) &\iff \det\exp(tA)=1\\ &\iff \exp(t\mathrm{Tr}(A))=1\\ &\iff t\mathrm{Tr}(A)=0\end{aligned}$$

となるから $A\in\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})$ は $\mathrm{Tr}(A)=0$ に同等である．

同様にして $GL(n,\boldsymbol{R})$ と $SL(n,\boldsymbol{R})$ のリー代数 $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ と $\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})$ は次のものになっている：

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R}) &= M(n,\boldsymbol{R})\\ \mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}) &= \{A\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})\,|\,\mathrm{Tr}(A)=0\}\end{aligned}$$

次に $u(n)$ について考えれば

$$\begin{aligned}\exp(tA)\in U(n) &\iff (\exp(tA))^*\exp tA=E\\ &\iff \exp(tA^*)\exp tA=E\end{aligned}$$

最後の式を t で微分すれば

$$A^*\exp(tA^*)\exp tA+\exp(tA^*)A\exp(tA)=0$$

ここで $t=0$ とおけば $A^*+A=0$ が得られる．

逆に $A^*+A=0$ とすれば

$$(\exp tA)^*=\exp tA^*=\exp(-tA)=(\exp tA)^{-1}$$

となって $\exp(tA)\in U(n)$ がわかるから $A\in u(n)$ は $A^*+A=0$ と同等になっている．

最後に $\mathfrak{su}(n)$ は $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \boldsymbol{C})$ であるから $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ となる．したがって $A \in \mathfrak{su}(n)$ は $\mathrm{Tr}(A) = 0$ で $A^* + A = 0$ に同等である．

いま $A, B \in M(n, \boldsymbol{C})$ について $[A, B]$ を次の式で定義する．$[A, B]$ は A, B の交換子積またはリーブラケットと呼ばれる．

$$[A, B] = AB - BA$$

このとき次の式は明らかであろう：

$$[A, A] = 0$$
$$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$$
$$[A, aB + bC] = a[A, B] + b[A, C]$$
$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

この最後の式は Jacobi（ヤコビ）の等式という．またここで a, b は複素数である．

いま $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$ はすべて $[\ ,\ ]$ について閉じている．すなわちこれらの線形リー代数を L とするとき

$$A, B \in \mathfrak{g} \implies [A, B] \in \mathfrak{g}$$

が成立する．これは $L = \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{C})$ のときは明らかである．

$L = \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ のときは一般に

$$\mathrm{Tr}([A, B]) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$$

となるから明らかである．

次に $L = \mathfrak{u}(n)$ の場合を考えれば，$A, B \in \mathfrak{u}(n)$ とすれば，$A^* = -A$, $B^* = -B$ であるから

$$([A, B])^* = (AB)^* - (BA)^* = B^*A^* - A^*B^* = BA - AB$$
$$= -[A, B]$$

となって $[A, B] \in \mathfrak{u}(n)$ が証明された．$L = \mathfrak{su}(n)$ の場合は $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$ であるから明らかである．

実は L が $[\ ,\ ]$ について閉じているということはすべての線形リー群のリー代数について成立している．

さて $\exp tA$ の各成分は t が有界な範囲では一様収束する Taylor（テイラー）級数になっている．したがって

$$\exp tA = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + Bt^n$$

とかいたときに B の各成分はやはり t が有界の範囲では一様収束する Taylor 級数で表される．したがって有界になる．

同様に $\log(E+tA)$ も t が十分小さい範囲では

$$\log(E+tA) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + t^n B$$

とかけば B も一様収束する Taylor 級数で表され，したがって有界になる．

このようなところでは t についての形式的な計算をすることができる．いま $f(t) = O(t^n)$ ということを t が十分小さいところでは $f(t) = g(t)t^n$ であって $g(t)$ が有界になっていることとする．この上で次の補題が成立する．

補題 1. 次の式が成立する．

(i) $$\exp(tA)\exp(tB) = \exp\left(t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B] + O(t^3)\right)$$

(ii) $$\exp(tA)\exp(tB)\exp(-tA)\exp(-tB) = \exp(t^2[A,B] + O(t^3))$$

［証明］ (i) 補題の前の注意によって形式的に計算すれば

$$\exp(tA)\exp(tB) = E + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3)$$

したがって

$$\begin{aligned}\log(\exp(tA)\exp(tB)) &= t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) \\ &\quad - \frac{t^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \\ &= t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B] + O(t^3)\end{aligned}$$

(ii) (i)の証明の途中の式から

$$\begin{aligned}&\exp(tA)\exp(tB)\exp(-tA)\exp(-tB) \\ &= \left(E + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3)\right) \\ &\quad \times \left(E - t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3)\right) \\ &= E - t^2(A^2 + BA + AB + B^2) + t^2(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3) \\ &= E + t^2[A,B] + O(t^3)\end{aligned}$$

これから $\log(\exp(tA)\exp(tB)\exp(-tA)\exp(-tB)) = t^2[A,B] + O(t^3)$ となる． ■

補題 2. 次の式が成立する.

(i) $\lim_{m\to\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)\right)^m = \exp(A+B)$

(ii) $\lim_{m\to\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)\exp\left(-\frac{A}{m}\right)\exp\left(-\frac{B}{m}\right)\right)^{m^2} = \exp([A,B])$

[証明] (i) 前補題1により m が十分大きければ

$$\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)\right)^m = \left(\exp\left(\frac{(A+B)}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\right)^m$$

$$= \exp\left(A+B+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

(ii) 同様に前補題1により m が十分大きいときには

$$\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)\exp\left(-\frac{A}{m}\right)\exp\left(-\frac{B}{m}\right)\right)^{m^2}$$

$$= \left(\exp\left(\frac{1}{m^2}[A,B]+O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right)\right)^{m^2} = \exp\left([A,B]+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$ ■

定理 1. L を線形リー群 G のリー代数とすれば次の性質が成立する:

(i) $a\in \boldsymbol{R},\ A\in L \implies aA\in L$

(ii) $A,B\in L \implies A+B\in L$

(iii) $A,B\in L \implies [A,B]\in L$

[証明] (i)は $A\in L$ の定義より明らか.

(ii) すべての実数 t について $\exp tA\in G,\ \exp tB\in G$ とすれば

$$\exp t(A+B) = \lim_{m\to\infty}\left(\exp\left(\frac{tA}{m}\right)\exp\left(\frac{tB}{m}\right)\right)^m$$

ここで右辺の ( ) の内部は G の元である. ところで G は $GL(n,\boldsymbol{C})$ の閉集合であるから lim もやはり G の元となって証明が終った.

(iii) 前補題2の(ii)を用いれば(ii)と同様に証明される. ■

さて L を無限次元かもしれない線形空間とする. L の任意の2元 A,B に対して $[A,B]\in L$ となるような $[A,B]$ が定義されていて次の条件をみたすときに L をリー代数という:

(i) $[A,A]=0$

(ii) 実数 a,b に対して

$$[aA+bB,C]=a[A,C]+b[B,C]$$
$$[A,aB+bC]=a[A,B]+b[A,C]$$
(iii)
$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$$

したがって線形リー群のリー代数は（当然のことながら）すべてリー代数になっている．当分の間は断らない限りリー代数といえばある線形リー群のリー代数を意味するものとする．それ以外のものは一般のリー代数と断ることにする．

さてリー代数 L が次の条件をみたすとき複素リー代数という：

$$A\in L,\ a\in C \implies aA\in L$$

したがって $\mathfrak{gl}(n,C)$，$\mathfrak{sl}(n,C)$ は複素リー代数である．リー代数が複素リー代数でないときは L は実リー代数という．$\mathfrak{u}(n)$ および $\mathfrak{su}(n)$ は実リー代数である（$A\in\mathfrak{su}(n)$ で $aA\notin\mathfrak{u}(n)$ なる例をみつけよ．もちろん a は複素数である.）．

トリビアルな注意であるが $\mathfrak{sl}(n,C)$，$\mathfrak{u}(n)$，$\mathfrak{su}(n)$ はすべて行列の積に関して閉じていない．実例を作って確かめてみてほしい．これらは [,] に関して閉じているだけである．$\mathfrak{gl}(n,C)$ と $M(n,C)$ とは集合としては同じであるが，$\mathfrak{gl}(n,C)$ での代数的演算は線形空間の演算と [,] である，と原則としては考えることにする．$M(n,C)$ では行列の積も自由に考えてよい．

V を無限次元かもしれない複素線形空間とする．このとき $\mathrm{End}(V)$ の2元 f，g に対して

$$[f,g]=fg-gf$$

と定義してできる一般リー代数を $\mathfrak{gl}(V)$ と表す．$\mathfrak{gl}(V)$ はこの場合複素リー代数になっている．

V を無限次元かもしれない実線形空間とするとき，同じ定義によって $\mathrm{End}(V)$ から得られる実リー代数もやはり $\mathfrak{gl}(V)$ によって表すことにする．すなわち V が複素線形空間ならば $\mathfrak{gl}(V)$ も複素リー代数，V が実線形空間ならば $\mathfrak{gl}(V)$ も実リー代数になっている．

いま G を線形リー群とする．V を有限次元複素線形空間とするとき

$$f:\ G\longrightarrow GL(V)$$

が連続な準同型であるとき，f を（正確には (f,V) を G の複素表現といい V をその表現空間という．V の複素次元をこの表現の次元という．

また G を線形リー群として V を有限実線形空間とするとき

$$f: \quad G \longrightarrow GL(V)$$

が連続な準同型であるとき，f を（正確には (f, V) を）G の実表現といい V をその表現空間という．V の実次元をこの表現の次元という．複素表現と実表現をまとめて表現という．

(f, V) を G の表現とする．このとき $V_0 \subseteq V$ がすべての $f(g)$ $(g \in G)$ について閉じているとき，V_0 は f で閉じているまたは不変であるという．

いま (f, V) を G の表現とするとき，$\{f(g) | g \in G\}$ の全体が既約ならば (f, V) を既約という．

もっと詳しくいえば，(f, V) が複素表現ならば，f について閉じた V の 0 でない複素線形部分空間が V 自身しかないときに既約というのであり，また (f, V) が実表現であるときは f について閉じた 0 でない V の実線形部分空間が V 自身しかないときにこの表現を既約というのである．

いま (f_1, V_1) と (f_2, V_2) とが G の表現であるとき，$V = V_1 \oplus V_2$ として $f: G \to GL(V)$ を

$$f(g) = f_1(g) \oplus f_2(g) \qquad \text{すなわち} \qquad f(g)(v_1, v_2) = (f_1(g)v_1,\ f_2(g)v_2)$$

で定義すれば (f, V) は G の表現になっている．この表現を f_1 と f_2 の直和という．いま $f_1(g)$ と $f_2(g)$ とを V_1，V_2 の基底を定めた上で行列でかいて A, B とすれば $f(g)$ は次の形の行列で表される：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

(f, V) が G の表現で $V_0 \subseteq V$ を f で閉じた線形部分空間とする．このとき $f_0: G \to GL(V)_0$ を次の式で定義する：

$$g \in G,\ v \in V_0 \implies f_0(g)v = f(g)v$$

このとき (f_0, V_0) は明らかに G の表現になっている．この表現を (f, V) の部分表現といい，f を V_0 に制限してできた表現であるという．

(f, V) が G の表現であるとき，f で閉じた V の線形部分空間 $V_1, \cdots, V_m$ で $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ であって $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_m$，$(f_i, V_i)$ は既約な表現となるようなものがあるとき，(f, V) は完全可約であるという．ここに f_i は f を V_i に制限してできた表現とする．

(f_1, V_1)，(f_2, V_2) が G の 2 つの表現とするとき，$V = V_1 \otimes V_2$ として $f: G \to$

$GL(V)$ を次の式で定義する：

$$g \in G \implies f(g)(v_1 \otimes v_2) = (f_1(g)v_1) \otimes (f_2(g)v_2)$$

このとき f は明らかに G の表現になっている．この表現のことを $(f_1 \otimes f_2,\ V_1 \otimes V_2)$ とかいて f_1 と f_2 のテンソル積（または直積）表現という．

さて L_1, L_2 をリー代数とする．線形写像 $\rho: L_1 \to L_2$ を準同型であるということを

$$A, B \in L_1 \implies \rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)]$$

が成立することと定義する．ここで L_1, L_2 が共に複素リー代数であるときは，ρ は複素線形写像であるものとする．

いま L はリー代数，V は無限次元かもしれない線形空間として，$\rho: L \to \mathfrak{gl}(V)$ を準同型とするとき $(\rho,\ V)$ を L の表現という．V をこの表現の表現空間といい，V の次元をこの表現の次元という．リー代数の表現は本書においても無限次元のものを考えることがある．上の定義において L が複素リー代数のときは V は複素線形空間で ρ は複素線形写像であるものとする．L が実リー代数のときでも，V が複素線形空間のときはこの表現を複素表現と呼ぶ．

線形リー群 G とそのリー代数 L の表現同士には次の定理で表される関係がある．

定 理 2.　G を線形リー群で L をそのリー代数とする．いま (f, V) を G の表現とするとき，L の表現 (ρ, V) で次の条件をみたすものがただ一通り存在する．

$$f(\exp(tA)) = \exp(t\rho(A))$$

ここに $t \in \boldsymbol{R}$ で $A \in L$ とする．

［証 明］　一意性は明らかであるから存在だけを証明する．$g(t) = f(\exp(tA))$ とおけば，明らかに $g: L \to GL(V)$ となり $g(s+t) = g(s)g(t)$ をみたす．したがって§1の定理 10 により

$$f(\exp(tA)) = \exp(tB)$$

となる $B \in \mathfrak{gl}(V)$ が存在する．いま $B = \rho(A)$ によって $\rho: L \to \mathfrak{gl}(V)$ を定義する．以下に ρ が準同型であることを示せばよい．

$$\exp(t\rho(aA)) = f(\exp(taA)) = \exp(ta\rho(A))$$

から

$$\rho(aA) = a\rho(A)$$

がわかる．次に $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ を証明する．

$$f\left(\left(\exp\frac{tA}{m}\exp\frac{tB}{m}\right)^m\right)=\left(f\left(\exp\frac{tA}{m}\right)f\left(\exp\frac{tB}{m}\right)\right)^m$$
$$=\left(\exp\frac{t\rho(A)}{m}\exp\frac{t\rho(B)}{m}\right)^m$$

ここで $m\to\infty$ とすれば，§1 の補題1により

$$\exp(t\rho(A+B))=\exp(t(\rho(A)+\rho(B)))$$

が得られて $\rho(A+B)=\rho(A)+\rho(B)$ が証明された．$\rho([A,B])=[\rho(A),\rho(B)]$ も §1 の補題1を用いて同じように証明すればよい．▩

この定理で定義された ρ を f の微分といって df で表す．

さて G を線形リー群として L をそのリー代数とするとき，$X\in G$，$A\in L$，$t\in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\exp t(XAX^{-1})=X\exp(tA)X^{-1}\in G$$

となるから $XAX^{-1}\in L$ となる．したがって

$$\mathrm{Ad}(X)A=XAX^{-1}$$

によって $\mathrm{Ad}(X)$ を定義すれば，明らかに $\mathrm{Ad}(X^{-1})$ は $\mathrm{Ad}(X)$ の逆になっているから $\mathrm{Ad}(X)\in GL(L)$ になっている．すなわち

$$\mathrm{Ad}:\quad G\longrightarrow GL(L)$$

いま (Ad,L) が G の表現になっている．これは

$$\mathrm{Ad}(XY)A=XYAY^{-1}X^{-1}=\mathrm{Ad}(X)\mathrm{Ad}(Y)A$$

になっており，$\mathrm{Ad}(X^{-1})=(\mathrm{Ad}(X))^{-1}$ であることは前にのべたように，$\mathrm{Ad}(X)$ が X について連続であることは明らかであるから証明された．

Ad のことを G の随伴表現という．

Ad の微分を ad とおけば (ad,L) は L の表現であって次の条件をみたす：

$$\exp(t\,\mathrm{ad}(X))A=\mathrm{Ad}(\exp(tX))A$$
$$=\exp(t\,X)A\exp(-tX)$$

t で微分して $t=0$ とおけば

$$\mathrm{ad}(X)A=XA-AX=[X,A]$$

が得られる．すなわち $\mathrm{ad}(X)$ は最初から

$$\mathrm{ad}(X)Y=[X,Y]$$

と定義してもよい．この ad も L の随伴表現と呼ばれている．

ここで Hausdorff（ハウスドルフ）の公式と呼ばれる大切な公式についてのべることにする．

定理3. $X, Y \in M(n, C)$ のノルム $\|X\|, \|Y\|$ が十分小さいならば次の式が成立する

$$\log(\exp X)(\exp Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{p+q=n} (Z_{p,q}{}' + Z_{p,q}{}'')$$

ここに $Z_{p,q}{}'$ と $Z_{p,q}{}''$ は次の式で表される：

$$Z_{p,q}{}' = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=p \\ q_1+\cdots+q_{m-1}=q-1 \\ p_i+q_i\geq 1 \\ p_m\geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\mathrm{ad}(X)^{p_1}\mathrm{ad}(Y)^{q_1}\cdots\mathrm{ad}(X)^{p_m}(Y)}{p_1!q_1!\cdots p_m!}$$

$$Z_{p,q}{}'' = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=p-1 \\ q_1+\cdots+q_{m-1}=q \\ p_i+q_i\geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\mathrm{ad}(X)^{p_1}\mathrm{ad}(Y)^{q_1}\cdots\mathrm{ad}(Y)^{q_{m-1}}(X)}{p_1!q_1!\cdots q_{m-1}!}$$

ここで多少意味を説明すれば，この式の展開の初めの方は次の形になっている：

$$Z = (X+Y) + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \cdots$$

したがって定理の重要な意味の1つは Z が最初の $X+Y$ という項を除いてはすべて交換子積の形にかかれていることである．この証明は補題1の前の注意から明らかのように収束の方は問題はない．したがって X, Y を変数を表す文字と考えて exp や log を X や Y についての形式的な無限級数と考えて証明すればよい．この証明のテクニックはここで議論していることとあまり関係がないので関連のある議論をする後の章で証明される．

この定理を用いて線形リー群とそのリー代数の関係をもう少し詳しく調べるために§2の終りで少しばかりのべた局所同型についての定義を思いだすことにする．

G_1 と G_2 とが2つの線形リー群とするとき，G_1 の単位元の近傍 U で定義された連続写像 $f: U \to G_2$ が局所準同型であるとは，次の条件をみたすものとする：

$$a, b, ab \in U \implies f(a)f(b) = f(ab)$$

（これから $a, a^{-1} \in U \Longrightarrow f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ がでる）．さらに f が U から G_2 の単位元の近傍 V への1対1の写像になっていて，f^{-1} も G_2 から G_1 への局所準同型になっているとき，f を局所同型という．

したがって G_1 と G_2 とが局所同型ということは，単位元の近傍では G_1 と G_2 とが全く同じものになっているということである．前節でのべたように G_1 とその普遍被覆群

$\tilde{G}_1$ とは局所同型になっている.

定理 4. G_1, G_2 が線形リー群で L_1, L_1 をそのリー代数とする. このとき $f: G_1 \to G_2$ が局所準同型ならば $df: L_1 \to L_2$ を次の式で定義すれば, df は (リー代数の) 準同型になっている:

$$(df)X = \frac{d}{dt} f(\exp tX)\Big|_{t=0}$$

ここに $X \in L_1$ とする.

[証明] まず t を十分小さくすれば $\exp tX$ は単位元の近傍に入るから $f(\exp tX)$ は定義できる. $\dfrac{d}{dt} f(\exp tX)$ の存在およびこれが準同型になることは前の表現の微分のときと同じ証明でよい. ▩

定理 5. G_1, G_2 を線形リー群で L_1, L_2 をそのリー代数とする. $\varphi: L_1 \to L_2$ を準同型とすれば, 局所準同型 $f: G_1 \to G_2$ で $df = \varphi$ となるものが存在する.

[証明] G_1 は線形リー群だから単位元の近傍 U を十分小さくとれば, $x \in U$ については $\exp X = x$ となる $X \in L_1$ が存在するようにできる ($GL(n, C)$ で成立していることだからよい.). ここで U を小さくすれば $\|X\|$ は小さくとれる. 逆に $X \in L_1$ で $\|X\|$ が十分小さければ $\exp X$ は G の単位元の近傍に入る. この log と exp は互いに逆になっているから, L の単位元の近傍と G の単位元の近傍とは位相空間として同相になっている.

いま $\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば, 上の G_1 と L_1 との同相関係および $\|X\|, \|Y\| < \varepsilon$ なる $X, Y \in L_1$ に対して $\varphi(X)$, $\varphi(Y)$ の Hausdorff の公式の右辺が収束するようにできる.

この状況において G_1 の近傍に f を定義するためには十分小さい $\varepsilon > 0$ をとって $\|X\| < \varepsilon$ なる $\exp X$ の上で f を定義すればよい. いま

$$f(\exp X) = \exp \varphi(X)$$

によって f を定義すれば $f(\exp tX) = \exp t\varphi(X)$ となる. これから $df = \varphi$ がわかる.

したがって十分小さな $\varepsilon > 0$ をとって $\|X\|, \|Y\| < \varepsilon$ のとき

$$f(\exp X \exp Y) = f(\exp X) f(\exp Y)$$

になっていることをいえばよい. ところで Hausdorff の公式を

$$\exp X \exp Y = \exp F(X, Y)$$

とかけば $F(X, Y)$ は X と Y と交換子積の組合せの無限和になっている. したがって

$$f(\exp X \exp Y) = f(\exp F(X, Y)) = \exp \varphi F(X, Y)$$

$$= \exp F(\varphi(X), \varphi(Y)) = \exp \varphi(X) \exp \varphi(Y)$$
$$= f(\exp X) f(\exp Y)$$

となって証明が終った．ここで F と φ とが交換できるというところで F の上にのべた形を使っている．■

定理 6. G_1, G_2 が線形リー群で L_1, L_2 はそのリー代数とする．このとき G_1 と G_2 とが局所同型となるための必要十分条件は L_1 と L_2 とが同型になることである．

［証明］ 定理5の証明のところでのべたようにリー代数は線形リー群の単位元の近傍だけできまってしまう．G_1 と G_2 とが局所同型ならば局所的には同じものだから，そのリー代数 L_1 と L_2 とが同型になるのは当然である．次に L_1 と L_2 とが同型とすれば φ：$L_1 \to L_2$ とその同型写像として f を $df = \varphi$ をみたすものとすれば，十分小さな X に対しては

$$f(\exp X) = \exp \varphi(X)$$

となる．ところで exp は L_i の単位元近傍と G_i の単位元の近傍との同相写像であるから f は同相写像になっている．f は局所準同形であるから，f が局所同相となる．■

定理 7. G_1 を弧状連結で単連結な線形リー群，G_2 を線形リー群とするとき次の性質が成り立つ．

（i） G_1 の単位元の局所単連結な近傍で定義された G_2 への局所準同型 f は G_1 から G_2 への連続準同型に一意的に拡大される．

（ii） G_1 のリー代数 L_1 の任意の表現 ρ に対して G の表現 f で $df = \rho$ となるものがただ一通り存在する．

［証明］ （i）は§2 の定理より明らか．（ii）は定理6と（i）より明らか．■

この定理の用い方についてその注意をしておきたい．線形リー群の単位元の小さな近傍はそのリー代数の単位元の小さな近傍と同相であるから，単連結弧状連結のいくらでも小さな近傍をとることができる．

いま（f_1, V_1）と（f_2, V_2）とが線形リー群 G の2つの表現であるとする．このとき，この2つの表現が同値であるということを S：$V_1 \to V_2$ となる線形同型写像が存在して，すべての G の元 x について

$$f_2(x) = S^{-1} f_1(x) S \qquad 略して \qquad f_2 = S^{-1} f_1 S$$

となることと定義する．

さらに (ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) とがリー代数 L の 2 つの表現であるとする．このときこの 2 つの表現が同値であるということを $S: V_1 \to V_2$ となる線形同型写像が存在して，すべての L の元 X について

$$\rho_2(X) = S^{-1}\rho_1(X)S \qquad \text{略して} \qquad \rho_2 = S^{-1}\rho_1 S$$

が成立することをいう．

定理 8. G を線形リー群，L をそのリー代数とする．いま (f_1, V_1)，(f_2, V_2) を G の 2 つの表現とするとき次の 2 つの性質が成立する．

（i） (f_1, V_1) と (f_2, V_2) とが同値ならば (df_1, V_1) と (df_2, V_2) とは同値である．

（ii） G が弧状連結で，(df_1, V_1) と (df_2, V_2) とが同値ならば (f_1, V_1) と (f_2, V_2) とが同値である．

［証明］（i） $f_2(x) = S^{-1}f_1(x)S$ が成立すれば

$$\begin{aligned}\exp t\, df_2(X) &= S^{-1}\exp(t\, df_1(X))S \\ &= \exp t\, S^{-1}df_1(X)S\end{aligned}$$

となるから $df_2(X) = S^{-1}df_1(X)S$ で df_1 と df_2 とが同値になる．

（ii） $df_2 = S^{-1}df_1 S$ が成立するとすれば，G の単位元の近傍の元 x は $x = \exp X$, $X \in L$ と表されるから

$$\begin{aligned}f_2(x) = f_2(\exp X) &= \exp df_2(X) = \exp S^{-1}df_1(X)S \\ &= S^{-1}(\exp df_1(X))S = S^{-1}f_1(X)S\end{aligned}$$

となる．

ところで G は弧状連結であるから G の任意の元 x は単位元の近傍の元 $x_1, \cdots, x_m$ をとれば $x = x_1 \cdots x_m$ と表される．したがって

$$\begin{aligned}f_2(x) = f_2(x_1)\cdots f_2(x_m) &= S^{-1}f_1(x_1)S \cdots S^{-1}f_1(x_m)S \\ &= S^{-1}f_1(x_1)\cdots f_1(x_m)S \\ &= S^{-1}f_1(x)S\end{aligned}$$

となって証明が終った．■

定理 9. G を線形リー群，L をそのリー代数とすれば，G の表現 (f, V) について次の性質が成立する．

（i） V の線形部分空間 U が G で閉じていれば U は df でも閉じている．したが

って df が既約ならば f も既約である.

(ii) G が弧状連結ならば, U が df で閉じていれば f でも閉じている. したがって G が弧状連結で f が既約ならば df も既約である.

［証明］ (i) $X \in L,\ u \in U$ とすれば

$$df(X)u = \lim_{t\to 0} \frac{f(\exp tX) - E}{t} u$$

であるが U が f で閉じているから $f(\exp tX)u \in U$ となり U は有限次元であるから $df(X)u \in U$ となる.

(ii) G は弧状連結だから G の任意の元は G の単位元の近傍の有限個の元の積で表される. したがって G の単位元の近傍の元, したがって $\exp X\ (X \in L)$ の形の元について U が $f(\exp X)$ について閉じていることを証明すればよい. ところで $u \in U$ とすれば

$$f(\exp X)u = \exp(df(X))u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(df(X))^m u$$

であって, $(df(X))^m u \in U$ で U が有限次元だからよい. ■

以上の定理によって G が単連結のリー群ならば, G の既約表現を全部求めるためには G のリー代数の既約表現を全部求めればよいことがわかる. たとえば $SL(n, C)$ や $SU(n)$ の既約表現を全部求めることは, $\mathfrak{sl}(n, C)$ や $\mathfrak{su}(n)$ の既約表現をすべて求めることと同じ問題になる.

L_1, L_2 を一般リー代数とするとき, 線形空間としての直和 $L_1 \oplus L_2$ に次の交換子積を入れて一般リー代数になる.

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$$

こうしてできたリー代数を L_1 と L_2 との直和といって $L_1 \oplus L_2$ で表す. 2個でなくて有限個の場合も同じ様に定義する.

いま L_1, L_2 を2つのリー代数として $L_1 \oplus L_2$ を考える. $X_i \in L_i$ とすれば明らかに

$$\exp(X_1 \oplus X_2) = \exp X_1 \oplus \exp X_2$$

となる. これからもし G を線形リー群で (f, V) はその表現でその部分表現 (f_1, V_1), (f_2, V_2) の直和になっていたとする. このとき次の式が成立する:

$$df = df_1 \oplus df_2$$

このことから次の定理が直ちに得られる.

定理 10. 弧状連結な線形リー群の表現が完全可約なための必要十分条件はその微分

表現が完全可約のことである.

さて L をリー代数として (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) をその2つの表現とする. E_i を V_i の恒等線形写像として

$$\rho(X) = \rho_1(X) \otimes E_2 + E_1 \otimes \rho_2(X)$$

によって $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ を定義すれば, ρ が線形のことは明らかであるが

$$\begin{aligned}\rho([X, Y]) &= \rho_1([X, Y]) \otimes E_2 + E_1 \otimes \rho_2([X, Y]) \\ &= [\rho_1(X), \rho_1(Y)] \otimes E_2 + E_1 \otimes [\rho_2(X), \rho_2(Y)]\end{aligned}$$

ところで一方

$$\begin{aligned}[\rho(X), \rho(Y)] &= [\rho_1(X) \otimes E_2 + E_1 \otimes \rho_2(X),\ \rho_1(Y) \otimes E_2 + E_1 \otimes \rho_2(Y)] \\ &= [\rho_1(X), \rho_1(Y)] \otimes E_2 + E_1 \otimes [\rho_2(X), \rho_2(Y)]\end{aligned}$$

となるから $(\rho, V_1 \otimes V_2)$ は L の表現となる. ここに $[E_1 \otimes X,\ Y \otimes E_2] = 0$ を用いている. ここで定義された ρ を $\rho_1 \otimes \rho_2$ で表して ρ_1 と ρ_2 との直積という.

定理 11. (f_1, V_1), (f_2, V_2) を線形リー群 G の表現とするとき, 次の式が成立する:

$$d(f_1 \otimes f_2) = df_1 \otimes df_2$$

［証明］ X を G のリー代数の任意の元, $t \in \boldsymbol{R}$ とすれば次の式が成立する:

$$\begin{aligned}(f_1 \otimes f_2)(\exp tX) &= f_1(\exp tX) \otimes f_2(\exp tX) \\ &= \exp(tdf_1X) \otimes \exp(tdf_2X)\end{aligned}$$

したがって t で微分して $t = 0$ とおけば

$$d(f_1 \otimes f_2)X = df_1X \otimes E_2 + E_1 \otimes df_2X$$

となるからよい. ■

以上で線形リー群とそのリー代数との関係が一通りすんだので, 以下リー代数は断らない限り有限次元の一般リー代数を意味することにする.

L をリー代数で L_0 をその線形部分空間とするとき, L_0 か L の部分代数（正確には部分リー代数）であるということを次の条件をみたすことと定義する:

$$X, Y \in L_0 \implies [X, Y] \in L_0$$

部分代数 L_0 が L のイデアルであるということを次の条件がみたされていることと定義する:

$$X \in L,\ \ Y \in L_0 \implies [X, Y] \in L_0$$

いま L をリー代数，L_0 をそのイデアルとする．このとき線形空間としての L/L_0 を交換子積を定義してリー代数とすることを考える．

L/L_0 の2つの元 $\bar{X}=X+L_0$，$\bar{Y}=Y+L_0$ を考える．このとき

$$[\bar{X},\bar{Y}]=[X,Y]+L_0$$

によって $[\bar{X},\bar{Y}]$ を定義する．まずこの定義が代表元 X,Y のとり方によらないことは $X_0, Y_0 \in L_0$ とすれば

$$[X+X_0,\ \ Y+Y_0]=[X,Y]+[X_0,Y]+[X,Y_0]+[X_0,Y_0]$$

となるが $[X_0,Y]+[X,Y_0]+[X_0,Y_0]\in L_0$ であるからよい．この交換子積が L/L_0 をリー代数にすることは明らかであろう．

いま X に $X+L_0$ を対応させる写像を φ とすれば $\varphi: L\to L/L_0$ であって，φ が準同型になっていることは明らかであろう．

いま L_1, L_2 を2つのリー代数として $\varphi: L_1\to L_2$ を準同型写像とする．このとき

$$\mathrm{Ker}(\varphi)=\varphi^{-1}(0)=\{X\in L_1|\varphi(X)=0\}$$

によって定義して φ の核と呼ぶ．φ は線形であるから $\mathrm{Ker}(\varphi)$ はもちろん L_1 の線形部分空間である．ところで $\mathrm{Ker}(\varphi)$ が L_1 のイデアルになることは

$$X\in L_1,\ \ Y\in\mathrm{Ker}(\varphi)\ \ \Longrightarrow\ \ \varphi([X,Y])=[\varphi(X),0]=0$$

によってわかる．

定 理 12.　（準同型定理）　L_1, L_2 を2つのリー代数として，$\varphi: L_1\to L_2$ を準同型写像とするとき，次の式が成立する：

$$L_1/\mathrm{Ker}(\varphi)\cong L_2$$

［証 明］　$\mathrm{Ker}(\varphi)=L_0$ とおいて $\bar{X}=X+L_0$ のとき $\bar{\varphi}(\bar{X})=\varphi(X)$ と定義すれば

$$\bar{\varphi}:\quad L_1/L_0\to L_2$$

が定義されて線形で1対1で L_2 の上への写像であることは線形代数から明らかである．

いま $\bar{X}=X+L_0$，$\bar{Y}=Y+L_0$ とすれば

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}([\bar{X},\bar{Y}])=\varphi([X,Y])+L_0&=[\varphi(X),\ \varphi(Y)]+L_0\\&=[\bar{\varphi}(\bar{X}),\bar{\varphi}(\bar{X})]\end{aligned}$$

となるから $\bar{\varphi}$ が同型写像であることは明らかである．■

リー代数 L のイデアルにはトリビアルなイデアルすなわち L と $\{0\}$ しかなくまた $[X,Y]\neq 0$ なる $X, Y\in L$ が存在するとき L を単純という．

次に§1の Jordan 分解についてもう少し考えることにする．V を有限次元の複素線形空間として，$A \in \mathrm{End}(V)$ とする．このとき A の Jordan 分解を $A = A_d + A_n$ とすれば $A_d, A_n \in \mathrm{End}(V)$ である．したがって $\mathrm{ad}\, A$, $\mathrm{ad}\, A_d$, $\mathrm{ad}\, A_n$ は $\mathrm{End}(\mathrm{End}\,(V))$ になっている．これについて次の定理がある．

定理 13. 上の状況において

$$\mathrm{ad}\, A = \mathrm{ad}\, A_d + \mathrm{ad}\, A_n$$

は $\mathrm{ad}\, A$ の Jordan 分解になっている．

［証明］ $X \in \mathrm{End}(V)$ とすれば

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}\, A_d,\ \mathrm{ad}\, A_n]X &= \mathrm{ad}\, A_d\, \mathrm{ad}\, A_n(X) - \mathrm{ad}\, A_n\, \mathrm{ad}\, A_d(X) \\ &= [A_d, [A_n, X]] - [A_n, [A_d, X]] \\ &= [[A_d, A_n], X] = 0\end{aligned}$$

となるから $\mathrm{ad}\, A_d$, $\mathrm{ad}\, A_n$ は可換である．いま

$$\lambda_A:\quad \mathrm{End}\, V \to \mathrm{End}\, V, \qquad \rho_A:\quad \mathrm{End}\, V \to \mathrm{End}\, V$$

を次の式で定義する：

$$\lambda_A X = AX, \qquad \rho_A X = XA$$

このとき λ_A と ρ_A とは可換であって

$$\mathrm{ad}\, A = \lambda_A - \rho_A$$

が成立する．いま $A_n{}^m = 0$ とすれば明らかに $\lambda_{A_n}{}^m = \rho_{A_n}{}^m = 0$ となる．λ_{A_n} と ρ_{A_n} が可換のことから

$$(\mathrm{ad}\, A_n)^{2m} = (\lambda_{A_n} - \rho_{A_n})^{2m} = 0$$

となる．したがって $\mathrm{ad}\, A_n$ もべき零になる．

次に A_s を V の基底を適当に $v_1, \cdots, v_n$ と選んで

$$A_s = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

とする．このとき $\mathfrak{gl}(V)$ の基底 E_{ij} を

$$E_{ij} v_k = \delta_{jk} v_i$$

によって定義すれば

$$\mathrm{ad}\, A_s E_{ij} = (a_i - a_j) E_{ij}$$

となるから $\mathrm{ad}\, A_s$ も対角化可能である．したがって§1の定理2の Jordan 分解の一意性

から $\mathrm{ad}\,A = \mathrm{ad}\,A_d + \mathrm{ad}\,A_n$ が $\mathrm{ad}\,A$ の Jordan 分解であることがわかる. ▨

ここで次の Engel (エンゲル) の定理を証明することにしよう.

定理 14. L は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分代数で, べき零の元のみから成っていて $V \neq 0$ とする. このとき V の 0 でない元 v ですべての L の元 X について次の式が成立するものが存在する:

$$Xv = 0$$

[証明] L の次元について帰納法で証明する. $\dim L = 1$ ならば明らかである. したがって $\dim L \geq 2$ として $\dim L$ より小さい次元については証明されているものとする. いま $\mathcal{S}$ を L のすべての L 以外の部分代数の集合と定義する. L の 1 次元の線形部分空間は $\mathcal{S}$ の元となるから $\mathcal{S}$ は空ではない. $\mathcal{S}$ のなかで次元の一番高いものを L_0 とすれば, L はべき零の元しかもたないから, L_0 ももちろんべき零の元しかもたない.

いま L_0 が L のイデアルであって $\dim L/L_0 = 1$ であることを証明する. このため線形空間 W を $W = L/L_0$ によって定義する. いま $X \in L_0$ とすれば L_0 は $\mathrm{ad}\,X$ で閉じている. したがって $\bar{Y} \in W$ を $\bar{Y} = Y + L_0$ として $\rho(X)$ を

$$\rho(X)\bar{Y} = (\mathrm{ad}\,X)Y + L_0 = [X, Y] + L_0$$

と定義すれば $\rho(X): W \to W$ となって定理 13 の証明からわかるように X がべき零であるから $\rho(X)$ もべき零である. $L_1 = \{\rho(X) \mid X \in L_0\}$ として帰納法の仮定を L_1 に適用すれば $w \in W$ なる $w \neq 0$ ですべての $X \in L_0$ について $\rho(X)w = 0$ となるものがある. いま $w = X_0 + L_0$ とすれば, $X_0 \notin L_0$ であって $[X_0, L_0] = \{[X_0, X] \mid X \in L_0\} \subseteq L_0$ となっている. これは $\{aX_0 + X \mid X \in L_0\}$ は L の部分代数であって L_0 より大きいから

$$L = \{aX_0 + X \mid X \in L_0\}$$

となる. これから $\dim L/L_0 = 1$ がでてさらに L_0 が L のイデアルになることがわかる.

L_0 に対して帰納法の仮定を適用すれば

$$V' = \{u \in V \mid \text{すべての } Y \in L_0 \text{ について } Yu = 0\}$$

が空でないことがわかる. $u \in V'$ と $Y \in L_0$ とすれば

$$YX_0u = X_0Yu + [Y, X_0]u = 0$$

が $[Y, X_0] \in L_0$ からわかる. これから $X_0u \in V'$ となり V' が X_0 で閉じていることがわかる. X_0 はべき零であるから V' の 0 でない元 v で $X_0v = 0$ となるものが存在する. この v は明らかに定理の条件をみたしている. ▨

2 単純リー代数と半単純リー代数

§4. $\mathfrak{sl}(n,C)$ と $\mathfrak{su}(n)$

いま $\mathfrak{gl}(n, C)$ の元 E_{ij} を (i, j) 成分以外はすべて 0 で (i,j) 成分が 1 の行列と定義する：

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} i \quad (\text{列 } j)$$

以下にリー代数のイデアルを $I, J, \cdots$ などで表すことにする．

一般に H, K が L の部分代数のとき $[H, K]$ を次の式で定義する：

$$[H, K] = \{\sum_i [A_i, B_i] \mid \text{すべての } i \text{ について } A_i \in H \text{ で } B_i \in K\}$$

特別な場合として $[L, L]$ は L のイデアルになっている．

いま L が単純だとすれば，L は可換でないから $[L, L] \neq \{0\}$ したがって $[L, L] = L$ となる．

いまさらに L の上の 0 でない表現 (ρ, V) を考えれば

$$\mathrm{Ker}\,\rho = \{A \in L \mid \rho(A) = 0\}$$

がイデアルになることから $\rho(A)=0$ は A が 0 のときしか起こらない．すなわち ρ は 1 対 1 の表現になっている．

さて $\mathfrak{sl}(n, C)$ が単純であることを証明するためにまず簡単な補題をいくつか証明する．

補題 1. $\mathfrak{sl}(2, C)$ は単純である．

［証明］ $\mathfrak{sl}(2, C)$ の基底は $E_{12}, E_{21}, E_{11}-E_{22}$ である．

I を $\mathfrak{sl}(2, C)$ のイデアル，$X \in I$ として

$$X = aE_{12} + bE_{21} + c(E_{11} - E_{22})$$

とおけば

$$[E_{12}, [E_{12}, X]] = [E_{12}, b(E_{11} - E_{22}) - 2cE_{12}] = -2bE_{12}$$

同様にして

$$[E_{21}, [E_{21}, X]] = -2aE_{21}$$

したがって $b \neq 0$ ならば $E_{12} \in I$. この場合には

$$[E_{12}, E_{21}] = E_{11} - E_{22} \in I$$

$$[E_{11} - E_{22}, E_{21}] = -2E_{21} \in I$$

となって I がすべての基底を含むので $I = \mathfrak{sl}(2, C)$ であることがわかる. $a \neq 0$ のときも同様である.

$a = b = 0$ で $c \neq 0$ のときは $E_{11} - E_{22} \in I$ となるから上の計算によって $E_{21} \in I$ となり同様に $E_{12} \in I$ もでるのでやはり I が $\mathfrak{sl}(2, C)$ 全体であることがわかる. ■

補題 2. I を $\mathfrak{sl}(n, C)$ $(n \geq 3)$ のイデアルとして $E_{ij} \in I (i \neq j)$ とすれば I は $\mathfrak{sl}(n, C)$ である.

［証明］ $k \neq i, j$ とすれば

$$[E_{ij}, E_{jk}] = E_{ik} \in I$$

さらに $l \neq i, k$ とすれば同様に $E_{lk} \in I$, さらに $m \neq l, k$ とすれば $E_{lm} \in I$ となるので, すべての $l \neq m$ について $E_{lm} \in I$ のことがわかる. さらに

$$[E_{lm}, E_{ml}] = E_{ll} - E_{mm} \in I$$

となるので, 基底の元がすべて I に入るので I が $\mathfrak{sl}(n, C)$ であることがわかった. ■

ここで $\mathfrak{sl}(n, C)$ のなかの対角行列の全体を $\mathfrak{h}$ で表すことにする.

補題 3. I は $\mathfrak{sl}(n, C)$ $(n \geq 3)$ のイデアルとして, $H \in \mathfrak{h}$, $H \in I$, $H \neq 0$ となる H が存在すれば I は $\mathfrak{sl}(n, C)$ となる.

［証明］ H を次の形とする：

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \qquad a_1 + \cdots + a_n = 0$$

もし $a_1 = \cdots = a_n$ とすれば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ となるので $a_i \neq a_j$ となる i, j が存在する. この i, j について

$$[H, E_{ij}] = (a_i - a_j)E_{ij} \in I$$

となるので前補題によって I は $\mathfrak{sl}(n,C)$ となる. ■

定理 1. $\mathfrak{sl}(n,C)$ は単純である.

［証明］ $n \geq 3$ として証明する. I を $\mathfrak{sl}(n,C)$ のイデアルで $X \in I$ で

$$X = \sum_{l \neq m} a_{lm}E_{lm} + H \qquad H \in \mathfrak{h}$$

の形としてここに $a_{ik} \neq 0$ としてよい.

このとき i,j を i,j,k が互いに相異なる数である様にとれば $[H, E_{ii} - E_{jj}] = 0$ であるから

$$X_1 = [X, E_{ii} - E_{jj}] = \sum_{l \neq i} a_{li}E_{li} - \sum_{l \neq j} a_{lj}E_{lj} - \sum_{i \neq m} a_{im}E_{im} + \sum_{j \neq m} a_{jm}E_{jm}$$

と X_1 をおけば $X_1 \in I$ となる. したがって X_2 を次のようにおけば $X_2 \in I$ となる：

$$X_2 = [X_1, E_{ki}] = -a_{ik}E_{ii} - a_{ij}E_{kj} + \sum_{i \neq m} a_{im}E_{km}$$

したがって次の元も I の元となり, $a_{ik} \neq 0$ から I が $\mathfrak{sl}(n,C)$ になることが補題 2 よりわかる：

$$[X_2, E_{kj}] = a_{ik}E_{kj} \qquad ■$$

次に $\mathfrak{sl}(n,C)$ と $\mathfrak{su}(n)$ との関係についてのべることにする.

いま $\mathfrak{sl}(n,C)$ から $\mathfrak{sl}(n,C)$ への実線形写像 φ を

$$\varphi(X) = -X^*$$

と定義すれば

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,C) \mid X = \varphi(X)\}$$

となっていることは明らかである.

ところで $X \in \mathfrak{sl}(n,C)$ とすれば

$$X = \frac{1}{2}(X - X^*) + i\left(\frac{1}{2i}(X + X^*)\right)$$

$$\frac{1}{2}(X - X^*),\ \frac{1}{2i}(X + X^*) \in \mathfrak{su}(n)$$

は明らかであるから $X = Y + iZ$ となる $Y, Z \in \mathfrak{su}(n)$ が存在する. この Y と Z のとり方がただ一通りであることは明らかであろう.

いま σ を $\mathfrak{su}(n)$ の表現とすれば, $\mathfrak{sl}(n,C)$ の表現 $\tilde{\sigma}$ を, $X = Y + iZ$, $Y, Z \in \mathfrak{su}(n)$ とおいて

$$\tilde{\sigma}(X) = \sigma(Y) + i\sigma(Z)$$

と定義すれば $\tilde{\sigma}$ が表現になっていることは

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}((a+bi)X) &= \sigma(aY-bZ) + i\sigma(aZ+bY) \\ &= (a+bi)\sigma(Y) + i(a+bi)\sigma(Z) \\ &= (a+bi)\tilde{\sigma}(X) \\ \tilde{\sigma}([X_1, X_2]) &= \tilde{\sigma}([Y_1, Y_2] - [Z_1, Z_2] \\ &\quad + i([Z_1, Y_2] + [Y_1, Z_2])) \\ &= \sigma([\sigma(Y_1), \sigma(Y_2)] - [\sigma(Z_1), \sigma(Z_2)] \\ &\quad + i([\sigma(Z_1), \sigma(Y_2)] + [\sigma(Y_1), \sigma(Z_2)]) \\ &= [\sigma(Y_1) + i\sigma(Z_1),\ \sigma(Y_2) + i\sigma(Z_2)] \\ &= [\tilde{\sigma}(X_1), \tilde{\sigma}(X_2)]\end{aligned}$$

から明らかであろう．ここに $X_k = Y_k + iZ_k$, $Y_k, Z_k \in \mathfrak{su}(n)$ $(k=1,2)$ とした．

逆に $\tilde{\sigma}$ を $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ の表現（すなわち複素表現）とすれば $\mathfrak{su}(n)$ の複素表現 σ を

$$\sigma(Y) = \tilde{\sigma}(Y) \qquad Y \in \mathfrak{su}(n)$$

と定義することによって得られる．

$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ は複素リー代数，$\mathfrak{su}(n)$ は実リー代数であるが，この2つのリー代数は以上の関係で結ばれており，一方に得られた結果がただちにもう一方に用いることができる．この意味で $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ を調べることと，$\mathfrak{su}(n)$ を調べることは実質的に同じことになっている．$\mathfrak{su}(n)$ を $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ の実形という．これは $\mathfrak{su}(n)$ が実リー代数であり，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ が複素リー代数であって，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ の任意の元 X が

$$X = Y + iZ \qquad Y, Z \in \mathfrak{su}(n)$$

とただ一通りに表されることからきているが，多少誤解を招くもととともなる．$\mathfrak{su}(n)$ は実数というよりは純虚数といった方がよいことは $Y^* = -Y$ の式から明らかであろう．すなわち上の分解 $X = Y + iZ$ において Y が純虚数で iZ が実数の役割をはたすと思えば間違いがないのである．

系　$\mathfrak{su}(n)$ は単純である．

［証明］ J を $\mathfrak{su}(n)$ の $\{0\}$ でないイデアルとする．このとき I を次のように定義する：

$$I = \{Y + iZ \mid Y, Z \in J\}$$

明らかに I は $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ のイデアルである．したがって $I = \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ となる．いま $J=$

$I \cap \mathfrak{su}(n)$ であることをいえば証明が完成する．このため $Y + iZ \in I \cap \mathfrak{su}(n)$，$Y, Z \in J$ とすれば

$$0 = Y + iZ + Y^* - iZ^* = iZ - iZ^*$$

となるから $Z = Z^*$，ところで $Z + Z^* = 0$ であるから $Z = 0$ となって証明が終った．■

$\mathfrak{sl}(n, C)$ と $\mathfrak{su}(n)$ との関係を一般のリー代数の場合に考えることにする．

いま L を実リー代数とする．このとき $L \times L$ に新しい交換子積を L の交換子積から次のように定義する．

$$[(A, B), (C, D)] = ([A, C] - [B, D],\ [A, D] + [B, C])$$

実際には (A, B) を $A + iB$ だと思って計算しているだけである．もちろん $L \times L$ の和やスカラー倍は

$$(A, B) + (C, D) = (A + C, B + D), \qquad (a + ib)(A, B) = (aA - bB, bA + aB)$$

で定義するのであるが，ここでも (A, B) を $A + iB$ と思って計算しているだけである．

これによって複素リー代数ができる．こうしてできた複素リー代数をもとの L の複素化といって L^C で表す．

前の例では $\mathfrak{sl}(n, C)$ が $\mathfrak{su}(n)$ の複素化になっている．

逆に複素リー代数 L が与えられていて，$\varphi : L \to L$ が次の条件をみたすとき φ を L の共役変換という：

(i) $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$

(ii) $\varphi(aA) \quad = \bar{a}\varphi(A)$ もちろん $\bar{a}$ は a の複素共役である．

(iii) $\varphi([A, B]) = [\varphi(A),\ \varphi(B)]$

(iv) $\varphi(\varphi(A)) \quad = A$

実際には $L = L_0{}^C$ のときに L の元を $A + iB$ $(A, B \in L_0)$ とかいて $\varphi(A + iB) = A - iB$ と考えれば上の条件をみたすことは明らかである．

このとき $L_1 \subseteq L$ を次の条件で定義する：

$$L_1 = \{A \in L \mid \varphi(A) = A\}$$

この L_1 が実リー代数になること，さらに $L_1{}^C$ が L と同型になることはほとんど明らかである（$L_1{}^C$ の元を $A + iB (A, B \in L_1)$ とかいたとき）．この形は L の元になっていて，L の元はすべてこの形にかける．すなわち $A \in L$ とすれば $\frac{1}{2}(A + \varphi(A))$ と $\frac{1}{2i}(A$

$-\varphi(A))$ は L_1 の元であり $A=\frac{1}{2}(A+\varphi(A))+i\left(\frac{1}{2i}(A-\varphi(A))\right)$ とかける.

以上において L_1 を L の実形という. もちろん L が実リー代数のときに L は L^C の実形になっている.

以上でわかるように実リー代数は複素化を行っていつでも複素リー代数にすることができる. しかし複素リー代数には実形があるとは限らない. また実形があるとしてもそれは共役変換 φ に依存するからただ一通りとは限らない.

ここで前に $\mathfrak{sl}(n, C)$ と $\mathfrak{su}(n)$ との関係で議論したことはすべてこの一般論でそのまま通用する. すなわち,

1. L^C が単純ならば L は単純である.
2. L の複素表現と L^C の複素表現とは1対1に対応する.

ここで L の表現 (ρ, V) に対して L^C の表現 ρ^C の定義を明確にしておけば

$$\rho^C(A+iB)=\rho(A)+i\rho(B)$$

である. もちろん L^C の元を $A+iB(A, B\in L)$ で表している. 次のやさしい演習問題を定理の形であげておく.

定理 2. (ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) とを実リー代数 L の2つの複素表現とするとき (ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) とが同値である必要十分条件は $({\rho_1}^C, V_1)$ と $({\rho_2}^C, V_2)$ とが同値であることである.

定理 3. (ρ, V) が実リー代数の複素表現とするとき, 次の性質が成立する:

(i) V の複素線形部分空間 U が ρ で閉じている必要十分条件は U が ρ^C で閉じていることである.

(ii) ρ が既約である必要十分条件は ρ^C が既約であることである.

(iii) ρ が完全可約である必要十分条件は ρ^C が完全可約であることである.

ここで表現 (ρ, V) が完全可約であるとは, V の ρ で閉じた部分空間 $V_1, \cdots, V_m$ があって $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ であって, ρ を V_i に制限してできた部分表現がすべて既約であることをいう.

さてここで $\mathfrak{sl}(2, C)$ の表現について考えることにする. $\mathfrak{sl}(2, C)$ の基底は $E_{12}, E_{21}, E_{11}-E_{22}$ であって, その交換関係は

$$[E_{12},\ E_{21}]=E_{11}-E_{22},\qquad [E_{11}-E_{22},\ E_{12}]=2E_{12}$$
$$[E_{11}-E_{22},\ E_{21}]=-2E_{21}$$

である．いま (ρ, V) を $\mathfrak{sl}(2,C)$ の表現として

$$E = \rho(E_{12}), \qquad F = \rho(E_{21}), \qquad H = \rho(E_{11} - E_{22})$$

とおけば

$$[E,F] = H, \qquad [H,E] = 2E, \qquad [H,F] = -2F$$

となる．この記号について次の補題が成立する．

補 題 4. 任意の自然数 n について次の等式が成立する：

(i) $$[H, E^n] = 2nE^n$$

(ii) $$[H, F^n] = -2nF^n$$

(iii) $$[E, F^n] = nF^{n-1}(H - n + 1)$$

(iv) $$[F, E^n] = -n(H - n + 1)E^{n-1}$$

［証 明］ n についての数学的帰納法で証明する．$n=1$ の場合は明らかであるから，n の場合を仮定して $n+1$ の場合を証明すればよい．

$$\begin{aligned}[H, E^{n+1}] &= [H, E^n]E + E^n[H, E] \\ &= 2nE^n \cdot E + 2E^n \cdot E = 2(n+1)E^{n+1} \\ [E, F^{n+1}] &= [E, F^n]F + F^n[E, F] \\ &= nF^{n-1}(H - n + 1)F + F^nH \\ &= (n+1)F^n(H-n) + nF^{n-1}[H, F] + 2nF^n \\ &= (n+1)F^n(H-n)\end{aligned}$$

(ii) と (iv) も同様に証明できる．■

さて，$(\rho, V), E, F, H$ は上のものとする．このとき $v \in V$ で次の条件をみたすものを原始ベクトル (primitive vector) と呼ぶ：

(i) v は H の固有ベクトルであって $v \neq 0$.

(ii) $Ev = 0$

補 題 5. $$Hv_1 = \lambda_1 v_1, \quad \cdots, \quad Hv_n = \lambda_n v_n \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j)$$

で $v_1 \neq 0, \cdots, v_n \neq 0$ ならば $v_1, \cdots, v_n$ は一次独立である．

［証 明］ いまもし $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ で $a_1 \neq 0, \cdots, a_n \neq 0$ であったとする．このとき $H^iv_j = \lambda_j{}^iv_j$ であるから

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$$

$$a_1\lambda_1v_1 + \cdots + a_n\lambda_nv_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1\lambda_1^{n-1}v_1 + \cdots + a_n\lambda_n^{n-1}v_n = 0$$

ところで $v_1 \neq 0, \cdots, v_n \neq 0$ であり

$$\det\begin{vmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_n \\ a_1\lambda_1 & \cdots\cdots & a_n\lambda_n \\ & \vdots & \\ a_1\lambda_1^{n-1} & \cdots\cdots & a_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = a_1\cdots a_n \prod_{i>k}(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$$

であるから矛盾する．■

補 題 6.　原始ベクトルは存在する．

［証 明］ H の 1 つの固有値を λ として，その λ を固有値とする固有ベクトルの 1 つを v とする．このとき補題 1 によって

$$H(E^n v) = 2nE^n v + E^n Hv = (2n+\lambda)E^n v$$

となるから $E^n v \neq 0$ ならば $E^n v$ は $2n+\lambda$ を固有値とする H の固有ベクトルになっていることがわかる．ところで V は有限次元であるから，こうしてできた H の固有値の列

$$\lambda,\quad \lambda+2,\quad \lambda+4,\quad \cdots,\quad \lambda+2n,\quad \cdots$$

は有限個で終ることになる．すなわちある n が存在して

$$E^n v \neq 0 \qquad で \qquad E^{n+1}v = 0$$

となる．ここで $v_0 = E^n v$ とおけば明らかに v_0 は原始ベクトルになっている．■

定 理 4.　v を原始ベクトルで $Hv = \mu v$ とするとき，$v_n = \dfrac{1}{n!}F^n v$, $v_{-1} = 0$ と定義すれば，次の等式が成立する．ここに $n = 0, 1, 2, \cdots$ とする：

(i)　$$Hv_n = (\mu - 2n)v_n$$

(ii)　$$Ev_n = (\mu - n + 1)v_{n-1}$$

(iii)　$$Fv_n = (n+1)v_{n+1}$$

［証 明］ (iii) は定義から明らか．(i)，(ii) は共に補題 4 を用いて次のように計算される：

$$\begin{aligned} n!Hv_n &= HF^n v = F^n Hv - 2nF^n v \\ &= \mu F^n v - 2nF^n v = n!(\mu - 2n)v_n \\ n!Ev_n &= EF^n v = F^n Ev + nF^{n-1}(H - n + 1)v \\ &= nF^{n-1}(\mu - n + 1)v = n!(\mu - n + 1)v_{n-1} \end{aligned}$$ ■

系 1. 定理4のなかの μ は負でない整数である．それを m とすれば $v_m \neq 0$ で $v_{m+1} = 0$ となる．

［証 明］ 定理4によって $Hv_n = (\mu - 2n)v_n$ であるから，$v_n \neq 0$ ならば v_n は H の固有ベクトルであるその固有値 $\mu - 2n$ は n によって異なるから，v_n は一次独立である．V は有限次元であるから $v_m \neq 0$ で $v_{m+1} = 0$ となる負でない整数 m が存在する．定理の (ii) において $n = m + 1$ とおけば $(\mu - m)v_m = 0$ となるから $\mu = m$ となる．■

系 2. H の固有値はすべて整数である．

［証 明］ λ を固有値とすれば，原始ベクトルの作り方から，原始ベクトルは $\lambda + 2n$ を固有値にもち，それが整数だから λ は整数となる．これから明らか．■

特別な場合として表現が既約のときを考える．この場合は定理 4 の（ i ），(ii)，(iii) の式から $v_0, v_1, \cdots, v_m$ で張られた空間が表現 ρ に関して閉じていることは明らかである．したがって V が $v_0, v_1, \cdots, v_m$ から張られた空間であることがわかる．逆に任意の負でない整数 m に対して V を $v_0, v_1, \cdots, v_m$ から張られた $m + 1$ 次元の複素線形空間として，

$$\rho(E_{11} - E_{22})v_k = (m - 2k)v_k$$

$$\rho(E_{21})v_k = (m - k + 1)v_{k-1} \qquad (v_{-1} = 0)$$

$$\rho(E_{12})v_k = (k + 1)v_{k+1} \qquad (v_{m+1} = 0)$$

によって ρ を定義すれば，ρ が $\mathfrak{sl}(2, C)$ の表現になっていることは明らかである．すなわちすべての $\mathfrak{sl}(2, C)$ の既約表現がこの形であることがわかる．したがって $\mathfrak{sl}(2, C)$ の既約表現は表現空間の次元をきめれば一意にきまることになる．いま，既約表現の特別な場合 $\mu = m = 0$ の場合を考える．このときは $v_1 = 0$ となる．すなわち定理2の（ i ），(ii)，(iii) の式をみればこの表現が 0 であることがわかる．この場合表現は 0 でも表現空間は v_0 から張られた 1 次元の空間であるからその次元は 1 である．

次に $\mu = m > 0$ である既約表現を考える．この場合定理 4 で H の固有値を考えれば $Hv_k = (m - 2k)v_k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, m)$ であるから H の固有値の全体は 0 を中心として次の対称な形になっている：

$$-m, \quad -m + 2, \quad \cdots, \quad m - 2, \quad m$$

m が偶数のときは 0 は固有値のなかに入っているが m が奇数のときは 0 は固有値ではない．

次に $\mathfrak{sl}(2,C)$ の任意の表現において H の固有値を a として $Hv=av(v\neq 0)$ とする．このとき，補題3によって $E^n v=v_0$ が原始ベクトルになるような n が存在する．このとき補題 3 の計算によって

$$Hv_0=H(E^n v)=(2n+a)v_0$$

となる．ところで定理 4 の系によって $2n+a$ は整数になっている．これから a 自身が整数であることがわかる．すなわち H の任意の固有値は整数である．

またこの議論から H の最大の固有値は負でない整数であることもわかる．

$h: L_1\to L_2$ を L_1 から L_2 への準同型とするとき，h が同型であるということを h が1対1であることと定義する．

h が L_2 の上への同型のときには h^{-1} は L_2 から L_1 の上への同型になっている（証明せよ）．

L から L の上への同型写像を自己同型という．L の自己同型写像の全体を $\mathrm{Aut}\,L$ とかく．$\mathrm{Aut}\,L$ はもちろん群をなしている．

さて $X\in L$ とすると，$A,B\in L$ に対して Jacobi の公式を書き直せば

$$(\mathrm{ad}\,X)[A,B]=[(\mathrm{ad}\,X)A,B]+[A,(\mathrm{ad}\,X)B]$$

となっている．これは微分の公式 $(fg)'=f'g+fg'$ によく似ている．したがって Leibniz（ライプニッツ）の公式を用いて

$$\frac{(\mathrm{ad}\,X)^n}{n!}[A,B]=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{i!}(\mathrm{ad}\,X)^iA,\ \frac{1}{(n-i)!}(\mathrm{ad}\,X)^{n-i}B\right]$$

が成立する．

いま $X\in L$ で $\mathrm{ad}\,X$ がべき零であったとする．すなわちある k があって $(\mathrm{ad}\,X)^k=0$ が成立していたとする．このとき $\exp(\mathrm{ad}\,X)$ は

$$\exp(\mathrm{ad}\,X)=1+\mathrm{ad}\,X+\frac{(\mathrm{ad}\,X)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\mathrm{ad}\,X)^{k-1}}{(k-1)!}$$

と有限和となるから定義ができる．この $\exp(\mathrm{ad}\,X)$ は $\mathrm{Aut}\,L$ の元になっている．これをみるためにまず $\exp(\mathrm{ad}\,X)$ が準同型であることは

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{ad}\,X)[A,B]&=\sum_{n=0}^{2(k-1)}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{i!}(\mathrm{ad}\,X)^iA,\ \frac{1}{(n-i)!}(\mathrm{ad}\,X)^{n-i}B\right]\\&=\left[\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}(\mathrm{ad}\,X)^iA,\ \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}(\mathrm{ad}\,X)^jB\right]\\&=[\exp(\mathrm{ad}\,X)A,\ \exp(\mathrm{ad}\,X)B]\end{aligned}$$

で証明される．$\exp(\mathrm{ad}\,X)$ に1対1であることは

$$1-(\exp(\mathrm{ad}\,X)-1)+(\exp(\mathrm{ad}\,X)-1)^2-(\exp(\mathrm{ad}\,X)-1)^3$$
$$+\cdots\pm(\exp(\mathrm{ad}\,X)-1)^{k-1}$$

が $\exp(\mathrm{ad}\,X)$ の逆になっているから明らかである．

$\mathrm{ad}\,X$ がべき零であるとき $\exp(\mathrm{ad}\,X)$ で表される自己同型を内部自己同型という．内部自己同型で生成される $\mathrm{Aut}\,L$ の部分群を $\mathrm{Int}\,L$ で表す．

いま $\phi\in\mathrm{Aut}\,L$ とすれば

$$\phi\cdot([X,\phi^{-1}(A)])=[\phi(X),\phi\phi^{-1}(A)]=[\phi(X),A]$$

となるから $\phi(\mathrm{ad}\,X)\phi^{-1}=\mathrm{ad}\,\phi(X)$ となる．これから $\mathrm{ad}\,X$ がべき零のときは $\mathrm{ad}\,\phi(X)$ もべき零であり

$$\phi\exp(\mathrm{ad}\,X)\phi^{-1}=\exp(\mathrm{ad}\,\phi(X))$$

となるから $\mathrm{Int}\,L$ は $\mathrm{Aut}\,L$ の正規部分群になっている．

さて $\mathfrak{sl}(2,C)$ を考えてその基底 $E_{12},E_{21},E_{11}-E_{22}$ を考える．今後 $\mathfrak{sl}(2,C)$ を考えるときは $H=E_{11}-E_{22}$ とおくことにする．いま σ を次の式で定義する：

$$\sigma=\exp(\mathrm{ad}\,E_{12})\exp(\mathrm{ad}(-E_{21}))\exp(\mathrm{ad}\,E_{12})$$

明らかに $E_{12},-E_{21}$ はべき零であるから $\mathrm{ad}\,E_{12}$，$\mathrm{ad}(-E_{21})$ はべき零である．したがって σ は内部自己同型である．

$$(\mathrm{ad}\,E_{12})(E_{21})=H,\qquad(\mathrm{ad}\,H)E_{12}=2E_{12},\qquad(\mathrm{ad}\,H)(E_{21})=-2E_{21}$$
$$(\mathrm{ad}\,E_{21})E_{12}=-H,\qquad(\mathrm{ad}\,E_{12})H=-2E_{12},\qquad(\mathrm{ad}\,E_{21})H=2E_{21}$$

を用いて計算すれば

$$\exp(\mathrm{ad}(-E_{21}))E_{12}=E_{12}+H-E_{21}$$
$$\exp(\mathrm{ad}\,E_{12})\exp(\mathrm{ad}(-E_{21}))E_{12}=-E_{21}$$

となるから次のことがわかる：

$$\sigma(E_{12})=-E_{21}$$

同様に計算すれば

$$\sigma(E_{21})=-E_{12},\qquad\sigma(H)=-H$$

がでてきて σ^2 は Aut の単位元となっている．

$E_{12},-E_{21}$ に $\exp E_{12}$，$\exp E_{21}$ を作れば次の $SL(2,C)$ の元が得られる：

$$\exp E_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\qquad\exp(-E_{21})=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

したがって，$S \in SL(2, C)$ を

$$S = (\exp E_{12})(\exp(-E_{21}))(\exp E_{12})$$

で定義すれば S は次の行列となる：

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{sl}(2, C)$ の基底について計算してみれば，$A \in \mathfrak{sl}(2, C)$ なる A については次の式が成立することがわかる：

$$\sigma(A) = SAS^{-1}$$

一般に $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ をリー代数として，$X \in L$ がべき零とすれば，次の式がすべての $Y \in L$ について成立する：

$$(\exp X)Y(\exp X)^{-1} = (\exp \operatorname{ad} X)Y$$

が成立する．これをみるためには λ_X を $\operatorname{End}(V)$ において X を左から掛ける操作，ρ_{-X} を $\operatorname{End}(V)$ において $-X$ を右から掛ける操作とすれば，

$$\operatorname{ad} X = \lambda_X + \rho_{-X}$$

になっており λ_X，ρ_{-X} は可換で共にべき零になっている．したがって

$$\exp \operatorname{ad} X = \exp(\lambda_X + \rho_{-X}) = \exp \lambda_X \exp \rho_{-X} = \lambda_{\exp X}\, \rho_{\exp -X}$$

であるから次の形で証明される：

$$(\exp \operatorname{ad} X)Y = \lambda_{\exp X}\, \rho_{\exp -X} Y = (\exp X)Y(\exp - X) = (\exp X)Y(\exp X)^{-1}$$

さて，$\mathfrak{sl}(2, C)$ の $m+1$ 次元の既約表現を $V(m)$ で表すことにして $V(m)$ の基底を $v_0, v_1, \cdots, v_m$ とする．すなわちこの表現を (ρ, V)，$V = V(m)$ とすれば，今後の我々の新しい記号では次のようになる：

$$\rho(H)v_i = (m-2i)v_i$$

$$\rho(E_{21})v_i = (i+1)v_{i+1} \qquad (v_{m+1} = 0)$$

$$\rho(E_{12})v_i = (m-i+1)v_{i-1} \qquad (v_{-1} = 0)$$

ここで $m = 0$ とすれば　$\rho(H)v_0 = \rho(E_{21})v_0 = \rho(E_{12})v_0 = 0$　となるから ρ は 0 となる．一般に L を単純リー代数とすれば，L の 1 次元の表現は常に 0 となる．これは表現空間の基底を v_0 とすれば，任意の $A \in L$ について $\rho(A)v_0 = av_0$ となるから $\rho(A)$ と $\rho(B)$ とは常に可換になる．したがって $\rho([A, B]) = 0$．ところで $[L, L] = L$ であるから，ρ は L の上で常に 0 となる．すなわち $\rho = 0$ となる．

以下 $\rho=0$ の表現空間はいつでも1次元と考える（すなわち0次元とは考えない）.

また $V(m)$ に戻って考えれば上の式から明らかなように $\rho(E_{12})$, $\rho(E_{21})$ はべき零になっている. 以下 $m>0$ として ρ は1対1であるとする. ここで τ を次の式で定義する：

$$\tau=\exp\rho(E_{12})\exp\rho(-E_{21})\exp\rho(E_{12})$$

上の議論からわかるように

$$\tau\rho(H)\tau^{-1}=\exp(\mathrm{ad}\,\rho(E_{12}))\exp(\mathrm{ad}\,\rho(-E_{21}))\exp(\mathrm{ad}\,\rho(E_{12}))\rho(H)$$

ところで ρ は1対1だから $\rho(\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C}))$ は $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ と同型である. したがって $\tau\rho(H)\tau^{-1}=-\rho(H)$ または $\tau\rho(H)=-\rho(H)\tau$ がでてくる. これから直ちに τ は v_i を v_{m-i} に移すことがわかる.

§5. 単純リー代数と半単純リー代数

本節から複素リー代数を考えることにして，断らない限りリー代数は複素リー代数を意味するものとする.

L をリー代数として $A,B\in L$ とする. このとき $\kappa(A,B)$ を次の式で定義する：

$$\kappa(A,B)=\mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\,A)(\mathrm{ad}\,B))$$

κ のことを Killing（キリング）形式という. 明らかに κ は対称双一次形式である.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([A,B]C)&=\mathrm{Tr}(ABC)-\mathrm{Tr}(BAC)\\&=\mathrm{Tr}(ABC)-\mathrm{Tr}(ACB)=\mathrm{Tr}(A[B,C])\end{aligned}$$

となる. また ad は表現であるから

$$\mathrm{ad}[A,B]=[\mathrm{ad}\,A,\ \mathrm{ad}\,B]$$

これから κ の次の式がでてくる：

$$\kappa([A,B],C)=\kappa(A,[B,C])$$

補題 1. L をリー代数，I を L のイデアルとするとき，L と I の Killing 形式をそれぞれ κ,κ_I とすれば I の上では κ と κ_I とは一致する. すなわち

$$A,B\in I\implies\kappa(A,B)=\kappa_I(A,B)$$

［証明］ I の基底を $A_1,\cdots,A_m$, L の基底を $A_1,\cdots,A_m$, $B_1,\cdots,B_l$ とする. I はイデアルであるから $A\in I$ とすれば $(\mathrm{ad}\,A)A_i$, $(\mathrm{ad}\,A)B_j\in I$ となる. すなわちこの基底の上で A を表す行列は

$$\operatorname{ad} A = \begin{pmatrix} \overbrace{\tilde{A}}^{m} & \tilde{*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\} m \qquad \text{ad}\,A \text{ を } L \text{ のなかで考えたとき}$$

$$\operatorname{ad} A = \tilde{A} \qquad \text{ad}\,A \text{ を } I \text{ で考えたとき}$$

となる．これから $\operatorname{Tr}((\operatorname{ad} A)\ (\operatorname{ad} B))$ が L で考えたときと I で考えたときと同じになることがわかる．■

さて $\mathfrak{gl}(n,C)$ の Killing 形式を求めてみよう．κ は対称双一次形式であるから

$$\kappa(A,B) = \frac{1}{2}(\kappa(A+B, A+B) - \kappa(A,A) - \kappa(B,B))$$

が成立するから $\kappa(A,A)$ を求めればよい．すなわち $\operatorname{Tr}((\operatorname{ad} A)(\operatorname{ad} A))$ を求めればよい．このため $\mathfrak{gl}(n,C)$ の基底 $E_{ij}(1 \leq i,j \leq n)$ を選べば

$$(\operatorname{ad} A)(\operatorname{ad} A)E_{ij} = [A,[A,E_{ij}]] = A^2E_{ij} - 2AE_{ij}A + E_{ij}A^2$$

この行列の (i,j) 成分を求めてすべての i,j について和をとればよい．A^2E_{ij} の (i,j) 成分は A^2 の (i,i) 成分である．したがって，すべての (i,j) についての和を求めれば $n\operatorname{Tr}(A^2)$ がでてくる．

同様に $-2AE_{ij}A$ の (i,j) 成分は $-2a_{ii}a_{jj}$ である．これをすべての (i,j) でたせば $-2\operatorname{Tr}(A)^2$ がでてくる．また $E_{ij}A^2$ の (i,j) 成分は A^2 の (j,j) 成分である．これをすべての (i,j) でたせば $n\operatorname{Tr}(A^2)$ がでてくる．全体として

$$\kappa(A,A) = 2n\operatorname{Tr}(A^2) - 2\operatorname{Tr}(A)^2$$

これから $\kappa(A,B)$ を計算すれば

$$\kappa(A,B) = 2n\operatorname{Tr}(AB) - 2\operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$$

がでてくる．

次に $\mathfrak{sl}(n,C)$ の Killing 形式を考えてみる．

$\mathfrak{sl}(n,C)$ は $\mathfrak{gl}(n,C)$ のイデアルである．($\operatorname{Tr}([A,B]) = 0$ であるから，$[A,B] \in \mathfrak{sl}(n,C)$ また $\mathfrak{sl}(n,C)$ は単純であるから $[\mathfrak{sl}(n,C), \mathfrak{sl}(n,C)] = \mathfrak{sl}(n,C)$，したがって $[\mathfrak{gl}(n,C), \mathfrak{gl}(n,C)] = \mathfrak{sl}(n,C)$ となる．) したがって $\mathfrak{sl}(n,C)$ の Killing 形式は $\mathfrak{gl}(n,C)$

のものをそのまま用いればよい．すなわち

$$\kappa(A,B)=2n\mathrm{Tr}(AB)-2\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)=2n\mathrm{Tr}(AB)$$

さて Killing 形式を一般化した状況を考える．L はリー代数で (ρ, V) をその表現とする．このとき，$A,B\in L$ について $\beta(A,B)$ を次の式で定義する：

$$\beta(A,B)=\mathrm{Tr}(\rho(A)\rho(B))$$

明らかに ρ を随伴表現としたときの β が Killing 形式になっている．

上の β は明らかに対称双一次形式になっている．さらに次の性質も明らかである：

$$\beta([A,B],C)=\beta(A,[B,C])$$

この β を ρ から作られる双一次形式という．

リー代数 L が半単純であるということを，L の任意の 1 対 1 の表現 (ρ, V) をとったときに ρ から作られる双一次形式が必ず非退化になっていることと定義する．

我々の当面の目的は単純リー代数が半単純であることを証明することである．まず次の補題を証明する．

補題 2. V を有限次元の複素線形空間として L を $\mathfrak{gl}(V)$ の複素線形部分空間とする．このとき M を次の式で定義する：

$$M=\{X\in\mathfrak{gl}(V)\mid \text{すべての } L \text{ の元 } Y \text{ について } [X,Y]\in L\}$$

いま M の元 X が次の条件をみたせば X はべき零である：

$$Y\in M \implies \mathrm{Tr}(XY)=0$$

［証明］ $X=S+N$ を X の Jordan 分解とする．このとき V の基底 $v_1,\cdots,v_m$ を適当に選んで S が次の形であるものとする：

$$S=\begin{pmatrix} a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_m\end{pmatrix}$$

さて E を次の式で定義する：

$$E=\{r_1a_1+\cdots+r_ma_m \mid r_1,\ \cdots,\ r_m\in\boldsymbol{R}\}$$

このとき E は実線形空間であり，E の実次元は高々 2 である．いま証明したいことは E の次元が 0 であることである．すなわちいま E^* を

$$f:\quad E \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

なる実線形汎関数の全体として，E^* の次元が 0 であることを証明すればよい．

いま $f \in E^*$ として $Y \in \mathfrak{gl}(V)$ を $v_1, \cdots, v_m$ の基底によって

$$Y = \begin{pmatrix} f(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(a_m) \end{pmatrix}$$

によって表される元とする．$v_1, \cdots, v_m$ の基底によって $E_{ij} \in \mathfrak{gl}(V)$ を普通に定義する．明らかに

$$[S, E_{ij}] = (a_i - a_j)E_{ij}, \qquad [Y, E_{ij}] = (f(a_i) - f(a_j))E_{ij}$$

さて $\gamma(x)$ を複素数を係数とする x の多項式で，すべての i, j について

$$f(a_i) - f(a_j) = \gamma(a_i - a_j)$$

をみたすものとして Lagrange の補間式によって作られたものとする．もし $a_i - a_j = a_l - a_k$ ならば，f は線形であるから $f(a_i) - f(a_j) = f(a_l) - f(a_k)$ になっているからこのような γ が存在することがわかる．また $i = j$ とおけば $\gamma(0) = 0$ となるから，γ には定数項がないことがわかる．

E_{ij} は $\mathfrak{gl}(V)$ の基底であるから次の式が成立する：

$$\mathrm{ad}\, Y = \gamma(\mathrm{ad}\, S)$$

ところで §3 定理 13 によって $\mathrm{ad}\, S$ は $\mathrm{ad}\, X$ の対角化可能な部分である．したがって §1 定理 2 によって $\mathrm{ad}\, S$ は $\mathrm{ad}\, X$ の定数項のない多項式で表される．したがって $\mathrm{ad}\, Y$ も $\mathrm{ad}\, X$ の定数項のない多項式によって表される．$X \in M$ であるから $\mathrm{ad}\, X$ は L を L に移す．したがって $\mathrm{ad}\, Y$ も L を L に移す．ゆえに $Y \in M$ となり $\mathrm{Tr}(XY) = 0$，したがって $\mathrm{Tr}(SY) = 0$ すなわち $\sum_i a_i f(a_i) = 0$ が得られた．f は線形であるから，この式から $\sum_i (f(a_i))^2 = 0$ がでるが $f(a_i) \in \boldsymbol{R}$ であるから $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_m) = 0$ がでて f は E の上で恒等的に 0 であることがわかった．すなわち E^* の次元は 0 である．■

定理 1. 単純リー代数 L は半単純である．

［証明］ (ρ, V) を L の 1 対 1 の表現として，β を ρ から作られた双一次形式とする．すなわち $\beta(X, Y) = \mathrm{Tr}(\rho(X)\rho(Y))$ である．このとき β が非退化であることをいえばよい．いま β が非退化でないとすれば，

$$J = \{X \in L \mid \text{すべての } L \text{ の元 } Y \text{ について } \beta(X, Y) = 0\}$$

によって J を定義すれば J は L の 0 でないイデアルになる．L は単純であるから $J=L$ が成立する．すなわち次の式が成立する：

$$X, Y \in L \implies \mathrm{Tr}(\rho(X)\rho(Y))=0$$

いま L_0 を次の式で定義する：

$$L_0=\{\rho(X)\,|\,X\in L\}$$

明らかに $L_0 \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ である．さらに M を次の式で定義する：

$$M=\{X\in\mathfrak{gl}(V)|\ \text{すべての}\ Y\in L_0\ \text{に対して}\ \mathrm{Tr}(XY)=0\}$$

いま次の式を証明する：

$$X\in L_0,\quad Y\in M \implies \mathrm{Tr}(XY)=0$$

さて $L=[L,L]$ であるから上の式の代りに次の式を証明すれば十分である：

$$X_1, X_2\in L_0,\quad Y\in M \implies \mathrm{Tr}([X_1, X_2]Y)=0$$

ところで $\mathrm{Tr}([X_1, X_2]Y)=\mathrm{Tr}(X_1[X_2, Y])$，ところで $Y\in M$ から $[X_2, Y]\in L_0$ したがって = の右辺は証明された．したがって補題 2 を用いれば，L_0 のすべての元がべき零であることがわかる．

これから §3 の定理 14 により，すべての L_0 の元 X に対して $Xv=0$ となる V の 0 でない元 v が存在する．いま W を次の式で定義する：

$$W=\{v\in V|\ \text{すべての}\ X\in L_0\ \text{について}\ Xv=0\}$$

明らかに W は V の複素線形部分空間であり，$\pi: V\to V/W$ を，v に $v+W$ を対応させる写像とすれば $(\pi\circ\rho,\ V/W)$ は L の表現になっていて $\pi\circ\rho$ からできる双一次形式を β' とすれば明らかに

$$\beta(X, Y)=\beta'(X, Y)$$

となっている．ところで $\dim V/W<\dim V$ であるから，β' は非退化である．これは矛盾する．■

半単純という言葉は代数学で一般的に用いられる言葉である．次の補題は我々の半単純が代数学の用語の半単純になっていることを示している．

補題 3. L を半単純リー代数とすれば，L には可換なイデアルは 0 しかない．

［証明］ いま I を L の可換なイデアルとして $X\in I$，$Y\in L$ とする．このとき

$$(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y):\quad L\longrightarrow I$$

になっている. I は可換だから $((\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y))^2=0$ となる. したがって $(\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y)$ はべき零である. したがって $\kappa(X,Y)=\mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\,X)(\mathrm{ad}\,Y))=0$ となる. Y は任意の L の元を走り, κ は非退化であるから $X=0$ となる. ■

系 1. L を半単純リー代数とすれば, L の 0 でない元 X で $\mathrm{ad}\,X$ がべき零でないものが存在する.

[証明] もし L のすべての元 X について $\mathrm{ad}\,X$ がべき零とすれば Engel の定理によって L の 0 でない元 Y ですべての $X\in L$ について

$$(\mathrm{ad}\,X)Y=0 \qquad \text{すなわち} \qquad [X,Y]=0$$

となるものが存在する. したがって I を

$$I=\{Y\in L \mid \text{すべての } X\in L \text{ について } [X,Y]=0\}$$

と定義すれば, 明らかに I は 0 でない可換なイデアルとなり補題 3 に反する. ■

系 2. L を半単純リー代数とすれば, $\mathrm{ad}: L\to\mathfrak{gl}(L)$ は 1 対 1 の線形写像である.

[証明] 系 1 の証明で定義した I は 0 であるから, どんな $Y\in L$ をとっても $Y\neq 0$ ならば $[X,Y]\neq 0$ となる $X\in L$ が存在する. ■

単純リー代数が半単純であることがわかったが, 逆に半単純リー代数は有限個の単純リー代数に分解される. このことを次に定理の形で証明するが, まずリー代数 L の Killing 形式 κ が与えられたときに, $X,Y\in L$ が直交するという概念を

$$\kappa(X,Y)=0$$

によって定義して $X\perp Y$ とかくことにする.

このとき κ が非退化であることは, L のすべての元と直交する元は 0 しかないことを意味している.

もう一つ注意すれば $L=I_1+I_2$ と 2 つのイデアル I_1, I_2 で L が張られているときに $I_1\cap I_2=\{0\}$ ならば $[I_1,I_2]\subseteq I_i$ $(i=1,2)$ が成立するから $[I_1,I_2]=0$ となる. すなわち $L=I_1\oplus I_2$ となる.

定理 2. L を半単純とする. このとき L のイデアル $L_1,\cdots,L_l$ であって, $L=L_1\oplus\cdots\oplus L_l$ で $L_1,\cdots,L_l$ が単純リー代数であるようなものが存在する. さらに任意の L のイデアルが単純ならば上の $L_1,\cdots,L_l$ の 1 つと一致する. さらに L_i の Killing 形式は L の Killing 形式と L_i の上で一致する.

［証明］ 今後 L の部分集合 S があったとき $S^{\perp}$ を次の式で定義することにする：

$$S^{\perp} = \{X \in L \mid \text{すべての } S \text{ の元 } Y \text{ に対して } \kappa(X, Y) = 0\}$$

いま I が L のイデアルであったとする．このとき $\kappa([X, Y], Z) = \kappa(X, [Y, Z])$ であるから $I^{\perp}$ もイデアルになっている．したがって $I \cap I^{\perp}$ もまたイデアルである．明らかに $I \cup I^{\perp}$ の任意の元と $I \cap I^{\perp}$ の任意の元は直交している．ところで κ は対称双一次形式であるから L は $I \cup I^{\perp}$ によって張られる．すなわち $I \cap I^{\perp}$ は L と直交している．κ は非退化であるから $I \cap I^{\perp} = \{0\}$ すなわち $L = I \oplus I^{\perp}$ であることがわかった．

この状況で I のイデアルを I_0 とすればもちろん I_0 は L のイデアルになるから，この議論を繰り返すことができる．したがって有限回で $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_l$ という単純イデアルの直和に分解することができる．

L の単純イデアルは $L_1, \cdots, L_l$ のいずれかしかないことをいうために I を L の単純イデアルとする．明らかに $[I, L]$ は L のイデアルでまた I のイデアルである．もし $[I, L] = \{0\}$ とすれば I は可換になって補題 3 に矛盾する．I は単純であるから $I = [I, L]$ となる．したがって $[I, L] = [I, L_1] \oplus \cdots \oplus [I, L_l]$ となるが明らかに右辺の直和因子は 1 つを除いては 0 である．ゆえに $[I, L_i] = I$ となる L_i が存在する．これから $I \subseteq L_i$，したがって $I = L_i$ となる．

定理の最後の性質は補題 1 から明らか．■

系 1. L の Killing 形式が非退化ならば L は半単純である．

［証明］ 定理の証明では L の Killing 形式が非退化のことしか用いていない．したがって L の Killing 形式が非退化ならば L は有限個の単純リー代数の直和になっている．したがって定理 1 により L が半単純であることがわかった．■

系 2. L が半単純ならば $L = [L, L]$ である．また L のすべてのイデアルは半単純である．さらに L の準同型像も半単純である．さらに L の任意のイデアルは単純イデアルの直和になっている．

［証明］ 準同型像だけを証明すればよい．φ を L からの準同型として，L の単純イデアルの分解を $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_l$ とする．このとき $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は L のイデアルであるから一般性を失うことなしに $L_{k+1} \oplus \cdots \oplus L_l$ としてよい．このとき φ の像は $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ と同型になっている．■

さて L を半単純，(ρ, V) を L の1対1の表現として，β を ρ から作られる双一次形式とする．

いま $X_1, \cdots, X_m$ を $\mathfrak{sl}(L)$ の基底とすれば，β が非退化であるから，次の性質をみたす $\mathfrak{sl}(L)$ の元 $Y_1, \cdots, Y_m$ がただ一通り存在する：

$$\beta(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$$

いま $\mathfrak{sl}(L)$ の任意の元 X に対して a_{ij}, b_{ij} を次の式によって定義する：

$$[X, X_i] = \sum_j a_{ij} X_j, \qquad [X, Y_i] = \sum_j b_{ij} Y_j$$

このとき次の式が成立する：

$$a_{ik} = \beta([X, X_i], Y_k) = \beta(-[X_i, X], Y_k) = -\beta(X_i, [X, Y_k]) = -b_{ki}$$

さて ρ の Casimir（カシミール）作用素 C_ρ を次の式で定義する：

$$C_\rho = \sum_i \rho(X_i)\rho(Y_i) \in \mathfrak{gl}(V)$$

さて一般に（ここでは $\mathfrak{gl}(V)$ に）$[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z]$ が成立するから任意の $\mathfrak{sl}(L)$ の元 X に対して

$$\begin{aligned}[\rho(X), C_\rho] &= \sum_i [\rho(X), \rho(X_i)]\rho(Y_i) + \sum_i \rho(X_i)[\rho(X), \rho(Y_i)] \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}\rho(X_j)\rho(Y_i) + \sum_{i,j} b_{ij}\rho(X_i)\rho(Y_j) \\ &= 0\end{aligned}$$

したがって C_ρ はすべての $\rho(X)$ と可換であることがわかる．C_ρ のトレースをとれば

$$\mathrm{Tr}(C_\rho) = \sum_i \mathrm{Tr}(\rho(X_i)\rho(Y_i)) = \sum_i \beta(X_i, Y_i) = \mathfrak{sl}(L) \text{ の複素次元}$$

さて ρ は既約であるから，Schur のレンマによって，C_ρ はスカラー（すなわち単位行列のスカラー倍）である．定義自身は $\mathfrak{sl}(L)$ の基底のとり方によるが，C_ρ は完全にきまってしまうので，結果として基底のとり方によらないことがわかる．

さて $\mathfrak{sl}(L)$ の表現の完全可約性をいう前に $\mathfrak{sl}(L)$ の表現 (ρ, V) は V が 1 次元(複素次元）のときは 0 であることを注意しておきたい．これは $\mathfrak{sl}(L)$ の元はすべて $[X, Y]$ の和の形にかけるが，1次元の表現では $[\rho(X), \rho(Y)] = 0$ となることから明らかである．

定理 3. （Weyl（ワイル）の定理）　L を半単純とすれば，L の表現 (ρ, V) は完全可約である．

［証明］ まず $W \subseteq V$ が表現 ρ について閉じた部分複素線形空間で，V/W が1次元複素次元の場合に定理を証明する．すなわち $W_0 \subseteq V$ なる1次元の複素線形空間 W_0 が

存在して，ρ は W_0 の上で 0 の表現で

$$V = W \oplus W_0$$

となることを証明する．

まずこの場合を W が ρ に関して既約である場合に還元できることを W の複素次元に関する帰納法で証明する．このため既約でないとして W' が ρ に関して閉じた W の複素線形部分空間であったとする．

このとき ρ は V/W' の表現と考えてよい．ところで $(V/W')/(W/W')$ の複素次元は1次元であって W/W' の複素次元は W の複素次元より小さいから，V/W' の1次元の複素線形部分空間 $\tilde{W}_0$ が存在して，ρ は $\tilde{W}_0$ の上で0となる表現であって

$$V/W' = W/W' \oplus \tilde{W}_0$$

が成立している．いま W_0 を次のように定義する：

$$W_0 = \{v \in V | v + W' \in \tilde{W}_0\}$$

このとき W_0/W' は複素次元が 1 であるから，帰納法の仮定により，複素次元が1であるような W_0 の複素線形部分空間 U_0 であって，ρ は U_0 の上で 0 で

$$W_0 = W' \oplus U_0$$

となるものが存在する．以上から明らかに

$$V = W \oplus U_0$$

が成立して W が ρ に関して既約な場合に還元された．

さて次に V/W の複素次元が1で W が ρ に関して既約な場合を考える．さて $C = C_\rho$ を ρ の Casimir 作用素とする．このとき，任意の $\mathfrak{sl}(L)$ の元 X に対して

$$\rho(X)C = C\rho(X)$$

となるから，$C(W) \subseteq W$ と

$$W_0 = \{v \in V | Cv = 0\}$$

とは共に ρ に関して閉じている．ところで ρ は V/W の上で 0 であるから，すべての $X \in \mathfrak{sl}(L)$ に対して $\rho(X)V \subseteq W$ となる．したがって Casimir 作用素の定義から明らかに次のことが成立する：

$$CV \subseteq W$$

したがって C は V/W の上では0となる．ところで W は ρ に関して既約であるから C は W の上ではスカラーである．このスカラーが 0 とすれば $\mathrm{Tr}(C) = 0$ となって $\dim W = 0$ となって矛盾する．ゆえに C は W の上で 0 でないスカラーである．すな

わち $W_0 \cap W = \{0\}$ がいえて証明が終った.

さて最後に一般の場合を考える. いま $\mathrm{Hom}(V, W)$ を $h: V \to W$ なる複素線形写像の全体と定義する.

いま $X \in \mathfrak{sl}(L)$ としたとき, $\mathrm{Hom}(V, W)$ を表現空間とする $\mathfrak{sl}(L)$ の表現 $\tilde{\rho}$ を次のように定義する. ここで $X \in \mathfrak{sl}(L)$, $v \in V$, $h \in \mathrm{Hom}(V, W)$ とする.

$$(\tilde{\rho}(X)h)v = \rho(X)h(v) - h(\rho(X)v)$$

このとき $(\tilde{\rho}, \mathrm{Hom}(V, W))$ が表現であることは次の計算から容易にわかる:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\rho}(aX + bY)h)(v) &= a\rho(X)h(v) + b\rho(Y)h(v) - ah(\rho(X)v) - bh(\rho(Y)v) \\
&= (a\tilde{\rho}(X)h + b\tilde{\rho}(Y)h)(v) \\
(\tilde{\rho}(X)(ah_1 + bh_2))(v) &= a\rho(X)h_1(v) + b\rho(X)h_2(v) - ah_1(\rho(X)v) - bh_2(\rho(X)v) \\
&= (a\tilde{\rho}(X)h_1 + b\tilde{\rho}(X)h_2)(v) \\
(\tilde{\rho}(X)\tilde{\rho}(Y)h)(v) &= \rho(X)((\tilde{\rho}(Y)h)(v)) - (\tilde{\rho}(Y)h)(\rho(X)v) \\
&= \rho(X)(\rho(Y)h(v) - h(\rho(Y)v)) \\
&\quad - \rho(Y)h(\rho(X)v) + h(\rho(Y)\rho(X)v) \\
&= \rho(X)\rho(Y)h(v) - \rho(X)h(\rho(Y)v) \\
&\quad - \rho(Y)h(\rho(X)v) + h(\rho(Y)\rho(X)v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\rho}(X)\tilde{\rho}(Y)h)(v) - (\tilde{\rho}(Y)\tilde{\rho}(X)h)(v) &= \rho(X)\rho(Y)h(v) - \rho(Y)\rho(X)h(v) \\
&\quad - h(\rho(X)\rho(Y)v) + h(\rho(Y)\rho(X)v) \\
&= \rho([X, Y])h(v) - h(\rho([X, Y])v) \\
&= (\tilde{\rho}([X, Y])h)(v)
\end{aligned}$$

いま $\mathcal{V}$ を次の条件をみたす $\mathrm{Hom}(V, W)$ の元 h の全体であると定義する.

h は W の上であるスカラー a に等しい. すなわちすべての $w \in W$ について $h(w) = aw$ が成立する. このとき $\mathcal{V}$ が $\mathrm{Hom}(V, W)$ の複素線形部分空間であることは明らかであるが, さらに $\mathcal{V}$ は表現 $\tilde{\rho}$ に関して閉じている. すなわち $h \in \mathcal{V}$ が W の上で a に等しいものとすれば, $w \in W$ として

$$(\tilde{\rho}(X)h)(w) = \rho(X)h(w) - h(\rho(X)w) = a\rho(X)w - a\rho(X)w = 0$$

いまさらに $\mathcal{W}$ を次のように定義する:

$$\mathcal{W} = \{h \in \mathcal{V} \mid h \text{ は } W \text{ の上で } 0 \text{ である}\}$$

このとき $\mathcal{W}$ が $\tilde{\rho}$ に関して閉じていることは上の計算から明らかである. さらに上の計算は $X \in \mathfrak{sl}(L)$ について $\tilde{\rho}(X): \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ を示している. さらに $f_1 \in \mathcal{V}$ と $f_2 \in \mathcal{V}$

とが W の上で同じスカラーであれば $f_1 - f_2 \in \mathcal{W}$ であることは明らかであるから $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ が1次元であることは明らかである．したがって前の議論が用いられて $\mathcal{V}$ の1次元の $\tilde{\rho}$ について閉じた部分空間 $\mathcal{U}_0$ で $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}_0$ となるものがあることがわかる（すなわち $\tilde{\rho}$ は $\mathcal{U}_0$ の上では恒等的に0である）．

いま $\mathcal{U}_0$ を生成する元を $f: V \to W$ とする．定数を掛けることによって，f は W の上ではスカラー1に等しいとしてよい．$\tilde{\rho}$ は $\mathcal{U}_0$ の上で0であるから $\tilde{\rho}(X)f = 0$ となる．すなわち

$$0 = (\tilde{\rho}(X)f)(v) = \rho(X)f(v) - f(\rho(X)v)$$

となる．いま $U_0 = \{v \in V | f(v) = 0\}$ と定義すれば $f(\rho(X)v) = \rho(X)f(v) = 0$ となるから U_0 は ρ について閉じている．しかも f は V を W に写像して W の元 w については $f(w) = w$ であるから $V = W \oplus U_0$ がわかって定理が証明された．■

ここでリー代数の微分についてのべることにする．いま L をリー代数とするとき，$\delta \in \mathfrak{gl}(L)$ が次の条件をみたすときに，δ は L の微分であるという：

$$A, B \in L \implies \delta[A, B] = [\delta A, B] + [A, \delta B]$$

もちろん微分という言葉は $f(t)$ の微係数を $f'(t)$ で表したときの公式 $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ との類似からきたものである．

δ_1 と δ_2 とが L の微分であるとき，$[\delta_1, \delta_2]$ も L の微分であることは次の計算からわかる：

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2][A, B] &= \delta_1\delta_2[A, B] - \delta_2\delta_1[A, B] \\
&= \delta_1([\delta_2 A, B] + [A, \delta_2 B]) \\
&\quad - \delta_2([\delta_1 A, B] + [A, \delta_1 B]) \\
&= [\delta_1\delta_2 A, B] + [\delta_2 A, \delta_1 B] + [\delta_1 A, \delta_2 B] + [A, \delta_1\delta_2 B] \\
&\quad - [\delta_2\delta_1 A, B] - [\delta_1 A, \delta_2 B] - [\delta_2 A, \delta_1 B] - [A, \delta_2\delta_1 B] \\
&= [[\delta_1, \delta_2]A, B] + [A, [\delta_1, \delta_2]B]
\end{aligned}$$

したがって L の微分の全体の集合を $\mathrm{Der}\, L$ で表すことにすれば $\mathrm{Der}\, L$ は $\mathfrak{gl}(L)$ の部分リー代数になっている．

次に $\mathrm{ad}\, L$ を次の式で定義する：

$$\mathrm{ad}\, L = \{\mathrm{ad}\, A \mid A \in L\}$$

我々は前に $\mathrm{ad}\, L$ が $\mathfrak{gl}(L)$ の部分リー代数になっていることをみたのであるが，さらに

Jacobi の式はちょうど ad A が微分になっていることを示しているから，$\mathrm{ad}\,L \subseteq \mathrm{Der}\,L$ となって ad L は Der L の部分リー代数になっている．さらに ad L が Der L のイデアルであることが次のようにわかる．いま $A \in L$, $\delta \in \mathrm{Der}\,L$ とすれば，$X \in L$ として，

$$\begin{aligned}[\delta, \mathrm{ad}\,A]X &= \delta[A, X] - \mathrm{ad}\,A(\delta X)\\ &= [\delta A, X] + [A, \delta X] - [A, \delta X]\\ &= [\delta A, X] = (\mathrm{ad}\,\delta A)X\end{aligned}$$

すなわち $[\delta, \mathrm{ad}\,A] = \mathrm{ad}(\delta A)$ となる．

定 理 4. L が半単純ならば，すべての微分は ad A の形で表される．すなわち $\mathrm{Der}\,L = \mathrm{ad}\,L$ となる．

［証 明］ 補題3の系2によって (ad, L) が L の 1 対 1 の表現であることがわかるから，$M = \mathrm{ad}\,L$ とおけば M は L と同型のリー代数である．したがって M の Killing 形式 κ_M は非退化である．いまさらに $D = \mathrm{Der}\,L$ とおけば M は D のイデアルである．したがって D の Killing 形式を κ_D とおけば κ_M と κ_D とは M の上で一致する．さて κ_D に関して M と直交する D の元の全体を $M^{\perp}$ とおけば $M^{\perp}$ は D のイデアルになり κ_M が非退化なことから $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ がわかる．M も $M^{\perp}$ も D のイデアルであるから $[M, M^{\perp}] = 0$ がでてくる．いま $\delta \in M^{\perp}$ とすれば，これはすべての $A \in L$ について

$$\mathrm{ad}(\delta A) = [\delta, \mathrm{ad}\,A] = 0$$

となる ad は1対1であるから $\delta A = 0$. これがすべての $A \in L$ に対して成立するから $\delta = 0$ となる．すなわち $M^{\perp} = 0$ となって $\mathrm{Der}\,L = \mathrm{ad}\,L$ がわかった．■

次の定理は次の節で重要な役割をはたす．

定 理 5. $L \subseteq \mathfrak{gl}(n, C)$ を半単純リー代数とする．いま $A \in L$ の Jordan 分解を $A = A_d + A_n$ とすれば A_d, A_n は共に L の元である．

［証 明］ いま N を次の式で定義する：

$$N = \{X \in \mathfrak{gl}(n, C) \mid \text{すべての } A \in L \text{ について } (\mathrm{ad}\,X)A \in L\}$$

このとき $(\mathrm{ad}[X, Y])A = [(\mathrm{ad}\,X)A, (\mathrm{ad}\,Y)A]$ であるから N は $\mathfrak{gl}(n, C)$ の部分リー代数であって，定義から明らかに L は N のイデアルになっている．

いま $A \in L$ としてその Jordan 分解を $A = A_d + A_n$ とすれば，$\mathrm{ad}\,A = \mathrm{ad}\,A_d + \mathrm{ad}\,A_n$ は ad A の Jordan 分解になるから §1 の定理2によって $\mathrm{ad}\,A_d : L \to L$, $\mathrm{ad}\,A_n : L \to L$ となる．すなわち $A_d \in N$, $A_n \in N$ となる．

いま W を $\mathrm{ad}\,L$ で閉じた C^n の任意の線形部分空間として L_W を次の式で定義する：

$$L_W = \{Y \in \mathfrak{gl}(n, C) \mid Y(W) \subseteq W \text{ で } \mathrm{Tr}_W(Y) = 0\}$$

ここに Tr_W は Y を W に制限したときのトレースを意味する．いま L' をさらに次の式で定義する：

$$L' = N \cap \bigcap L_W$$

ここに $\bigcap L_W$ の W はすべての L で閉じた C^n の線形部分空間を走るものとする．

さて $L = [L, L]$ で，$\mathrm{Tr}([A, B]) = 0$ であるから $L \subseteq L_W$ となっている．したがって $L \subseteq L'$ となっている．一方 $A \in L$，$A = A_d + A_n$ をその Jordan 分解とすれば，再び §1 の定理 2 によって $A(W) \subseteq W$ から $A_d(W) \subseteq W$ で $A_n(W) \subseteq W$ となるから A_n はべき零であるから $\mathrm{Tr}_W(A_d) = 0$ すなわち $A_n \in L_W$ したがって $A_n \in L'$ となる．$A_d = A - A_n$ であるから $A_d \in L'$ となる．ゆえに $L = L'$ を証明すれば十分である．

さて $[L, L'] \subseteq [L, N] = L \subseteq L'$ であるから，(ad, L') は L の表現になっている．したがって Weyl の定理により，L の表現空間として $L' = L \oplus M$ となる M が存在する．ところで $[L, L'] = L$ であるから，$\mathrm{ad}\,L$ は M の上では 0 になっている．いま W を C^n の線形部分空間で L について既約なものとする．いま $Y \in M$ とすれば，$[L, Y] = 0$ となるから Schur の補題から $Y = cE$ となる c が存在する．ところで $Y \in L_W$ となるから $\mathrm{Tr}_W(Y) = 0$ すなわち $c = 0$ となって Y は M の上では 0 に等しいことがわかる． Weyl の定義によって C^n は L で既約な線形部分空間の直和になっているから $Y = 0$ となる．すなわち $M = 0$ となって $L = L'$ が証明された．■

ここでリー代数 L がべき零であるという概念を導入しておく．いま $L^0 = L$，$L^1 = [L, L]$，一般に

$$L^{n+1} = [L, L^n]$$

によって L^n を定義する．

ある自然数 n があって $L^n = 0$ となるときに L がべき零であるという．べき零のリー代数の典型的なものとしては，第一に可換なリー代数は $L^1 = [L, L] = 0$ となるからべき零である．さらに次の形の行列全体は $\mathfrak{gl}(n, C)$ の部分リー代数となる：

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

このリー代数を L とすれば $L^{n-1}=0$ となるからべき零である．

もし L がべき零とすれば L の任意の部分リー代数がべき零になることは明らかであろう．同様に φ を L からの準同型とすれば $[\varphi(A),\varphi(B)]=\varphi[A,B]$ であるから L の φ による像がやはりべき零になることは明らかであろう．

いま一般にリー代数 L について $Z(L)$ を次の式で定義する：

$$Z(L)=\{X\in L|\ \text{すべての}\ Y\in L\ \text{について}\ [X,Y]=0\}$$

明らかに $Z(L)$ はイデアルになる．(Jacobi の式を使え)

もし L が単純ならば明らかに $Z(L)=0$ となる．したがって L が半単純の場合も $Z(L)=0$ となる．

いま $L/Z(L)$ の2元を $X+Z(L)$ と $Y+Z(L)$ とすれば $[X,Y]+Z(L)=[X+Z(L),Y+Z(L)]$ となるから，$L/Z(L)$ がべき零ならば L もべき零になる．

逆に L がべき零で $L\neq 0$ とすれば $L^n\neq 0$ で $L^{n+1}=0$ とすれば $X\in L^n$ で $X\neq 0$ とすれば明らかに $X\in Z(L)$ となっているから $Z(L)\neq 0$ のことがわかる．

いま L をべき零として $X\in L$ とすれば $\mathrm{ad}\,X$ がべき零のことは明らかであろう．この逆が成立して Engel（エンゲル）の定理といわれる．すなわち次の定理である．

定理 6. L のすべての元 X について $\mathrm{ad}\,X$ がべき零ならば L もべき零である．

［証明］ L の次元についての数学的帰納法で証明する．L のすべての元 X について $\mathrm{ad}\,X$ がべき零であるから，§3 の定理 14 によって $Y\neq 0$ なる L の元 Y ですべての $X\in L$ について $(\mathrm{ad}\,X)Y=0$ となるものがある．すなわち $Y\in Z(L)$ となる．さて L のすべての元 X について $\mathrm{ad}\,X$ がべき零であるから $L/Z(L)$ のすべての元 $\bar{X}$ についても $\mathrm{ad}\,\bar{X}$ はべき零になる．ところで $L/Z(L)$ の次元は L の次元より小さいから帰納法の仮定によって $L/Z(L)$ はべき零になる．したがって L 自身がべき零である．■

ここで $Z(L)$ についての §3 の定理 14 のもう1つの応用をあげておく．

定理 7. L がべき零で K が L の0でないイデアルとすれば $K\cap Z(L)\neq 0$.

［証明］ すべての $X\in L$ について $\mathrm{ad}\,X$ を K の上で考えればこれはべき零であるから §3 の定理 14 により K の 0でない元 Y で，すべての $X\in L$ について $(\mathrm{ad}\,X)Y=0$ となるものがある．すなわち $Y\in K\cap Z(L)$ となる．■

§6. 複素線形半単純リー代数の Cartan 分解

この節では L は常に 0 でない複素線形半単純リー代数とする.

前節補題3の系1により L の元 X で $\mathrm{ad}\,X$ がべき零でないものが存在する. すなわち X の Jordan 分解を $X = X_d + X_n$ とすれば $\mathrm{ad}\,X = \mathrm{ad}\,X_d + \mathrm{ad}\,X_n$ は $\mathrm{ad}\,X$ の Jordan 分解であるから, これは $\mathrm{ad}\,X_d$ が 0 でないこと, したがって X_d が 0 でないことを意味している. 前節の定理5により $X_d \in L$ であるから, L に 0 でない対角化可能な元が存在することになる.

いま L の部分代数 T が等羅部分代数であるということを T のすべての元が対角化可能であることと定義すれば, 上のことは0でない等羅部分代数が存在することを意味している.

補題 1. Tを L の等羅部分代数とすれば T は可換である.

[証明] $X \in T$ としたとき, X の L と T における随伴作用素をそれぞれ $\mathrm{ad}\,X$, $\mathrm{ad}_0\,X$ で表すことにする. X は対角化可能であるから $\mathrm{ad}\,X$ は対角化可能したがって §1 補題 3 により $\mathrm{ad}_0\,X$ も対角化可能である. いま証明したいことは $\mathrm{ad}_0\,X = 0$ である. すなわち $\mathrm{ad}_0\,X$ が対角化可能であるから, $\mathrm{ad}_0\,X$ の固有値がすべて0であることをいえばよい. そのため, いま $Y \in T$ として

$$(\mathrm{ad}_0\,X)\,Y = aY \qquad a \neq 0$$

とする. これは $(\mathrm{ad}_0 Y)X = -aY$ となる.

一方 Y も対角化可能したがって $\mathrm{ad}_0 Y$ も対角化可能であるから

$$X = X_0 + X_1 + \cdots + X_k \qquad (\mathrm{ad}_0 Y)X_i = b_i X_i$$

で $b_0 = 0$, $b_i \neq 0 (i \neq 0)$ となる一次独立の X_i が存在する. したがって次の計算により $b_1 = \cdots = b_k = 0$

$$(\mathrm{ad}_0 Y)^2 X = (\mathrm{ad}_0 Y)(-aY) = 0$$

$$(\mathrm{ad}_0 Y)^2 X = b_1{}^2 X_1 + \cdots + b_k{}^2 X_k$$

したがって $(\mathrm{ad}_0 Y)X = (\mathrm{ad}_0 Y)X_0 = 0$ となって矛盾がでた. ■

L の極大な等羅部分代数を Cartan 部分代数という. 以後 Cartan 部分代数の1つを固定して $\mathfrak{h}$ で表す. いま T を L の等羅部分代数として, $\mathfrak{h} \subseteq T$ とすれば Cartan 部分代数の定義により, $\mathfrak{h} = T$ となる.

$\mathfrak{sl}(n, C)$ の場合には, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{sl}(n, C)$ のなかの対角行列の全体とすれば, $\mathfrak{h}$ が対角化可能な行列からできていることは明らかである. $\mathfrak{h}$ が Cartan 部分代数であることをいおう.

このためには $\mathfrak{sl}(n, C)$ の元 H が $\mathfrak{h}$ のすべての元で可換であれば $H \in \mathfrak{h}$ のことをいえばよい. $H \notin \mathfrak{h}$ とする.

$$H = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} E_{kl}$$

として $i \neq j$ なる i, j について $a_{ij} \neq 0$ とする. このとき $E_{ii} - E_{jj} \in \mathfrak{h}$ であるから

$$H(E_{ii} - E_{jj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{ki} - \sum_{l=1}^{n} a_{lj} E_{lj}$$

$$(E_{ii} - E_{jj})H = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E_{ik} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl} E_{jl}$$

ところで第1式で E_{ij} の係数は $-a_{ij}$, 第 2 式で E_{ij} の係数は a_{ij} となるから H と $E_{ii} - E_{jj}$ とは可換にならないことになって矛盾する. 以下に $\mathfrak{sl}(n, C)$ を考えるときはその Cartan 部分代数は必ずこの $\mathfrak{h}$ と固定して考えることにする.

さて $\mathfrak{h}$ を L の Cartan 部分代数とする. このとき $\mathfrak{h}$ は可換であるから ad $\mathfrak{h}$ は互いに可換な対角化可能な線形写像の集合である. したがって §1 の補題2により, 同時に対角化可能である. したがって $\mathfrak{h}$ の線形汎関数の全体を今後 $\mathfrak{h}^*$ で表すことにすれば, すべての $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$L_\alpha = \{X \in L \mid \text{すべての } H \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [H, X] = \alpha(H)X\}$$

によって L_α を定義すれば L は L_α の線形空間としての直和になっている.

いま $L_\alpha \neq 0$ で $\alpha \neq 0$ のとき α のことをルートといい, ルートの全体を Φ で表して L のルート系と呼ぶ. もちろん Φ は $\mathfrak{h}$ に依存するのであるが, いつも $\mathfrak{h}$ を1つ固定した上で考えているものとする.

$\alpha = 0$ のときの L_α を以下に C で表すことにする. 明らかに $\mathfrak{h} \subseteq C$ となる. 当面の目的の1つは $C = \mathfrak{h}$ を証明することである.

L は有限次元であるから, Φ はもちろん有限集合である. Φ の元を $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ で表せば, いままでいったことから L は次の形の線形空間の直和になっている:

$$L = C \oplus L_{\alpha_1} \oplus L_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus L_{\alpha_m}$$

これを L の Cartan 分解という.

定理 1. (i) $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ とすれば $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$ が成立する.

(ii) $X \in L_\alpha$ で $\alpha \neq 0$ ならば, ad X はべき零である.

(iii) $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha + \beta \neq 0$ ならば, L の Killing 形式 κ に関して L_α と L_β とは直交している.

［証明］（i） $X \in L_\alpha$, $Y \in L_\beta$, $H \in \mathfrak{h}$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ad}[X, Y])H &= [[X, Y], H] = -[[Y, H], X] - [[H, X], Y] \\
&= -\beta(H)[Y, X] + \alpha(H)[X, Y] \\
&= (\alpha(H) + \beta(H))[X, Y]
\end{aligned}
$$

（ii） Φ は有限集合であるから（ii）は（i）から直ちにでる.

（iii） いま $\alpha + \beta \neq 0$ とすれば $\alpha(H) + \beta(H) \neq 0$ となる $H \in \mathfrak{h}$ が存在する. このような H を 1 つとれば $X \in L_\alpha$, $Y \in L_\beta$ とすれば

$$\kappa([H, X], Y) = -\kappa([X, H], Y) = -\kappa(X, [H, Y])$$

から $\alpha(H)\kappa(X, Y) = -\beta(H)\kappa(X, Y)$. これから $\kappa(X, Y) = 0$ がでてくる. ∎

系 Killing 形式 κ は C の上では非退化である.

［証明］ C の元 X をとれば κ は非退化であるから $\kappa(X, Y) \neq 0$ となる Y が存在する. ところで

$$Y = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_m \qquad Y_0 \in C,\ Y_i \in L_{\alpha_i},\ \alpha_i \in \Phi\ (i \neq 0)$$

とかける. ところで $L_\alpha(\alpha \in \Phi)$ と $C = L_0$ とは定理の（iii）によって直交しているから $\kappa(X, Y_0) \neq 0$, すなわち κ は C の上で非退化である. ∎

V を有限次元の線形空間とする. いま X, Y を $\mathrm{End}(V)$ の可換な元とする. いま Y がべき零として $Y^m = 0$ とすれば $(XY)^m = X^m Y^m = 0$ となる. したがって $\mathrm{Tr}(XY) = 0$ となる.

定理 2. 上にのべた状況において $C = \mathfrak{h}$ となる.

［証明］ $\mathfrak{h} \subseteq C$ であるから, $X \in C$ として $X \in \mathfrak{h}$ をいえばよい. X の Jordan 分解を $X = X_d + X_n$ として, $X_d, X_n \in \mathfrak{h}$ をいえばよい. ところで $X \in C$ は

$$(\mathrm{ad}\, X)\mathfrak{h} = 0$$

を意味する. したがって §1 定理 2 により

$$(\mathrm{ad}\, X)_d:\ \mathfrak{h} \to 0, \qquad (\mathrm{ad}\, X)_n:\ \mathfrak{h} \to 0$$

となる. ところで $(\mathrm{ad}\, X)_d = \mathrm{ad}\, X_d$, $(\mathrm{ad}\, X)_n = \mathrm{ad}\, X_n$ であるから $X_d, X_n \in C$ となる.

まず $X_d \in \mathfrak{h}$ をいおう. X_d は対角化可能で $\mathrm{ad}\, X_d : \mathfrak{h} \to 0$ であるから X_d と $\mathfrak{h}$ とで張られる部分リー代数はやはり等羅部分代数である. したがって $\mathfrak{h}$ の極大性により $X_d \in \mathfrak{h}$ となる.

あとは $X_n \in \mathfrak{h}$ をいえば十分である．前定理の系により $Y \in C$ を任意にとって $\kappa(X_n, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X_n \,\mathrm{ad}\, Y) = 0$ をいえばよい．これは X_n したがって $\mathrm{ad}\, X_n$ がべき零であるから $\mathrm{ad}\, X_n$ と $\mathrm{ad}\, Y$ とが可換であることをいえばよい．したがって C が可換のことをいえばよい．そのためにまず C がべき零であることを証明する．

いま $X \in C$ とする．Engel の定理によって $\mathrm{ad}_C X$ がべき零であることを証明すればよい．$X = X_d + X_n$ を X の Jordan 分解としたとき最初に証明したように $X_d, X_n \in C$ となる．$\mathrm{ad}_C X = \mathrm{ad}_C X_d + \mathrm{ad}_C X_n$ であって $\mathrm{ad}_C X_d$ と $\mathrm{ad}_C X_n$ とは可換であるから $\mathrm{ad}_C X_d$ と $\mathrm{ad}_C X_n$ とがべき零であることをいえばよい．ところで $X_d \in \mathfrak{h}$ となることは既に証明されているから $\mathrm{ad}_C X_d = 0$ となってよい．また X_n はべき零であるから $\mathrm{ad}_C X_n$ がべき零になる．これで C がべき零であることが証明された．

さて C が可換でないとする．すなわち $[C, C] \neq 0$ とする．C はべき零であるから前節の定理7によって $Y \in Z(C) \cap [C, C]$ で $Y \neq 0$ となるものがある．Y が対角化可能でないとすれば Y のべき零部分を Y_n とすれば $Y_n \neq 0$ で $Y_n \in C$ となる．$Y \in Z(C)$ すなわち $\mathrm{ad}\, Y : C \to 0$ から $\mathrm{ad}\, Y_n : C \to 0$ がでるから Y_n は任意の $X \in C$ と可換でべき零だから

$$\kappa(Y_n, X) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, Y_n)(\mathrm{ad}\, X)) = 0$$

となって前定理1の系と矛盾する．

したがって $Y \in Z(C) \cap [C, C]$ が対角化可能として矛盾をだせばよい．既に証明したように C の対角化可能の元は $\mathfrak{h}$ の元である．ゆえに $\mathfrak{h} \cap [C, C] = 0$ をいえばよい．いま $X \in \mathfrak{h} \cap [C, C]$ とすれば，$X = [X_1, X_2]$，$X_1, X_2 \in C$ の形にかける．したがって $\mathfrak{h}$ の任意の元 H に対して，$[H, X_1] = 0$ だから

$$\kappa(H, X) = \kappa(H, [X_1, X_2]) = \kappa([H, X_1], X_2) = 0$$

となる．ところで $X \in \mathfrak{h}$ であるから，もし κ が $\mathfrak{h}$ の上で非退化であることがいえれば証明が終る．

さて $H \in \mathfrak{h}$ として $[H, \mathfrak{h}] = 0$ から $H = 0$ を導けばよい．このためには前定理の系により任意の $X \in C$ について $\kappa(X, H) = 0$ をいえばよい．X の Jordan 分解を $X = X_d + X_n$ とすれば，前に証明したように $X_d \in \mathfrak{h}$ となるから $\kappa(X, H) = \kappa(X_n, H)$．ところで X_n はべき零だから $\kappa(X_n, H) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, X_n)(\mathrm{ad}\, H)) = 0$ となって証明が終った．■

系 κ を $\mathfrak{h}$ の上に制限したものは非退化である．

この定理2によって L の Cartan 分解は

$$L = \mathfrak{h} \oplus L_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus L_{\alpha_m} \qquad \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\} = \Phi$$

の形であることがわかった.

また κ は $\mathfrak{h}$ の上で非退化であるから $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}$ の汎関数の全体 $\mathfrak{h}^*$ との間の同型を次の形で行うことができる. $\varphi \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathfrak{h}$ の元 T_φ で次の条件をもつものがただ1つ存在する：

$$H \in \mathfrak{h} \implies \varphi(H) = \kappa(T_\varphi, H)$$

特に今後 $\alpha \in \Phi$ なる α にこの対応で対応する元を T_α とかくことにする.

定理1によって $\alpha + \beta \neq 0$ のときは $\kappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$ となる. さらに α がルートのときは $\kappa(\mathfrak{h}, L_\alpha) = 0$ となる. 次の定理3は Cartan 分解のようすを示す基本的な定理である.

その前に定理の証明のために線形代数の簡単な補題を1つ証明しておく.

補題 2. V を有限次元の複素線形空間, $A, B, C \in \mathfrak{gl}(V)$, $[A, C] = 0$, $[B, C] = 0$, $[A, B] = C$ で C が対角化可能ならば $C = 0$ である.

[証明] C は対角化可能であるから $C = 0$ を証明するためには C のすべての固有値が 0 となることをいえばよい. いま C の固有値の1つを c として W_0 を次の式で定義する：

$$W_0 = \{v \in V | Cv = cv\}$$

明らかに W_0 は B で閉じている. したがって W_0 のなかの B の固有ベクトルの 1 つを v とすれば

$$Bv = bv, \qquad Cv = cv \qquad v \neq 0$$

となる. いま $v, Av, A^2v, \cdots, A^nv$ が一次独立となるような最大な n をとり $v, Av, \cdots, A^nv$ で張られる線形空間を W とする. 明らかに W は A と C で閉じており, さらに B でも閉じていることは次の式から帰納法で容易に証明される：

$$\begin{aligned} BA^{i+1}v &= [B, A]A^iv + ABA^iv \\ &= -CA^iv + ABA^iv = -cA^iv + ABA^iv \end{aligned}$$

いま W の上でのトレースを Tr_W とかけば, $CA^iv = cA^iv$ であるから C は $v, Av, \cdots, A^nv$ を基底にとれば cE の形になっている. したがって

$$nc = \mathrm{Tr}_W(C) = \mathrm{Tr}_W([A, B]) = 0$$

となるから $c = 0$ がわかった. ■

定理 3. Cartan 分解について次の性質が成立する：

(i) Φ は $\mathfrak{h}^*$ を張る.

(ii) α がルートならば $-\alpha$ もルートである.

(iii) α がルート, $X \in L_\alpha$, $Y \in L_{-\alpha}$ ならば次が成立する：

$$[X, Y] = \kappa(X, Y)T_\alpha$$

(iv) α がルートならば $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ は T_α で張られる. すなわち1次元である.

(v) α がルートならば次の式が成立する：

$$\alpha(T_\alpha) = \kappa(T_\alpha, T_\alpha) \neq 0$$

(vi) α がルートで, X_α は L_α の0でない元とする. このとき $L_{-\alpha}$ の0でない元 Y_α で, $X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$ が張る L の部分リー代数が次の対応で $\mathfrak{gl}(2, C)$ と同型になるものが存在する：

$$X_\alpha \mapsto E_{12}, \qquad Y_\alpha \mapsto E_{21}, \qquad H_\alpha \mapsto E_{11} - E_{22}$$

(vii) H_α, $H_{-\alpha}$, T_α の間に次の関係が成立する：

$$H_\alpha = \frac{2T_\alpha}{\kappa(T_\alpha, T_\alpha)}, \qquad H_\alpha = -H_{-\alpha}$$

［証明］ (i) もし Φ が $\mathfrak{h}^*$ を張らないとすれば Φ で張られる空間の次元は $\mathfrak{h}^*$ の次元より小さい. すなわち Φ で張られる線形空間の基底を $\beta_1, \cdots, \beta_k$ として, $\mathfrak{h}$ の基底を $H_1, \cdots, H_l$ とすれば, $\dim \mathfrak{h}^* = \dim \mathfrak{h}$ であるから $k < l$ となっている. したがって

$$x_1\beta_i(H_1) + \cdots + x_l\beta_i(H_l) = 0 \qquad i = 1, \cdots, k$$

は全部が0でない解 $x_1, \cdots, x_l$ をもつ. $H = x_1H_1 + \cdots + x_lH_l$ と定義すれば, $H \neq 0$ であって H は Φ のすべての元 α に対して $\alpha(H) = 0$ となる. これは L_α の定義より $[H, L_\alpha] = 0$ を意味する. ところで $[H, \mathfrak{h}] = 0$ であるから H は L の Cartan 分解の各成分と可換になる. すなわち $[H, L] = 0$ すなわち $H \in Z(L)$ となって矛盾する.

(ii) α がルートで $-\alpha$ がルートでなければ $L_{-\alpha} = 0$ したがって定理1により L_α は Cartan 分解の各成分と κ に関して直交する. すなわち L_α は L のすべての元と κ に関して直交する. これは κ が非退化であることに反する.

(iii) α をルートとして $X \in L_\alpha$, $Y \in L_{-\alpha}$ とする. 定理1により $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ となる. いま $H \in \mathfrak{h}$ を任意にとれば次の計算が成立する：

$$\begin{aligned}\kappa(H, [X, Y]) &= \kappa([H, X], Y) = \alpha(H)\kappa(X, Y) = \kappa(T_\alpha, H)\kappa(X, Y)\\ &= \kappa(\kappa(X, Y)T_\alpha, H) = \kappa(H, \kappa(X, Y)T_\alpha)\end{aligned}$$

これから $[X, Y]-\kappa(X, Y)T_\alpha$ がすべての $H\in\mathfrak{h}$ について κ で直交することがわかり，$[X, Y]-\kappa(X, Y)T_\alpha\in\mathfrak{h}$ で κ は $\mathfrak{h}$ の上で非退化だから $[X, Y]=\kappa(X, Y)T_\alpha$ がでた．

(iv) (iii) から $X\in L_\alpha$, $Y\in L_{-\alpha}$ で $\kappa(X, Y)\neq 0$ なる X, Y が存在することをいえばよい．ところで $\kappa(L_\alpha, L_{-\alpha})=0$ とすれば，定理1より $\kappa(L_\alpha, L)=0$ となって κ が非退化のことに反する．

(v) $\alpha(T_\alpha)=0$ とすれば，$X\in L_\alpha$ なる X に対しては $[T_\alpha, X]=\alpha(T_\alpha)X=0$. 同様にして $Y\in L_{-\alpha}$ とすれば $[T_\alpha, Y]=0$. (iv) の証明によって $\kappa(X, Y)\neq 0$ となる $X\in L_\alpha$, $Y\in L_{-\alpha}$ が存在する．一般性を失うことなしに $\kappa(X, Y)=1$ としてよい．このとき (iii) によって $[X, Y]=T_\alpha$ となる．これは補題に反する．

(vi) (iv) で証明したように $X_\alpha\in L_\alpha$ で $X_\alpha\neq 0$ ならば，$\kappa(X_\alpha, L_{-\alpha})\neq 0$ なので (v) によって $Y_\alpha\in L_{-\alpha}$ を選んで次の式が成立するようにできる：

$$\kappa(X_\alpha, Y_\alpha)=\kappa\frac{2}{(T_\alpha, T_\alpha)}$$

いま H_α を次の式で定義する：

$$H_\alpha=\frac{2T_\alpha}{\kappa(T_\alpha, T_\alpha)}$$

このとき (iii) によって $[X_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha$ となる．さらに

$$[H_\alpha, X_\alpha]=\frac{2}{\alpha(T_\alpha)}[T_\alpha, X_\alpha]=\frac{2\alpha(T_\alpha)}{\alpha(T_\alpha)}X_\alpha=2X_\alpha$$

となる．同様にして $[H_\alpha, Y_\alpha]=-2Y_\alpha$ がでてくる．したがって $X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha$ で張られる線形空間が $\mathfrak{sl}(2, C)$ と同型のことは明らかである．

(vii) T_α は $\kappa(T_\alpha, H)=\alpha(H)$となるように定義されている．したがって $T_{-\alpha}=-T_\alpha$ となる．H_α の定義の仕方からすべてが明らかである．■

この定理で作られた $X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha$ で張られる $\mathfrak{sl}(2, C)$ と同型な部分リー代数を今後 S_α とかくことにする．上の定理での Cartan 分解の構造の解析はさらに次の定理で継続される．

定理 4. (i) α がルートならば L_α の次元は1である．したがって $X_\alpha\in L_\alpha$ なる 0 でない X_α のとり方はスカラー倍を除いては一意的に定まる．したがって S_α は L_α と $L_{-\alpha}$ を含む．また 0 でない $X_\alpha\in L_\alpha$ を固定すれば $[X_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha$ となる

Y_α はただ一通りに定まる.

(ii) α がルートとするとき, α のスカラー倍でルートになるのは α と $-\alpha$ だけである.

(iii) α, β がルートならば, $\beta(H_\alpha) \in \boldsymbol{Z}$ となる. その上 $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha$ はまたルートとなる.

(iv) $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ がすべてルートならば $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$ となる.

(v) α, β がルートで $\beta \neq \pm\alpha$ とする. いま p, q をそれぞれ $\beta - p\alpha$, $\beta + q\alpha$ がルートであるような最大の自然数とする. このとき $-p \leq i \leq q$ なるすべての i について $\beta + i\alpha$ はルートになっており $\beta(H_\alpha) = p - q$ が成立する.

(vi) L はリー代数として L_α の全体で生成される.

［証明］ (i) と (ii) とを同時に証明する. いま $\mathfrak{h}$ と $L_{c\alpha}(c \neq 0)$ 全体から生成された線形空間を M とする. $S_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha$ を固定して, $\rho(E_{12}) = \mathrm{ad}\, X_\alpha$, $\rho(E_{21}) = \mathrm{ad}\, Y_\alpha$, $\rho(E_{11} - E_{22}) = \mathrm{ad}\, H_\alpha$ とおけば定理1によって (ρ, M) は $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ の1つの表現になっている. ところで $\mathrm{ad}\, H_\alpha$ の固有値は §4 定理4の系2によって整数になるから $c\alpha(H_\alpha) = 2c$ が整数でなければならないことがわかる.

いま Weyl の定理によって (ρ, M) を既約成分に分解する. ところで $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ の既約表現の $\rho(E_{11} - E_{22})$ の固有値は $m, m-2, \cdots, -m$ の形であるから, 0 を固有値にもつ既約部分と1を固有値にもつ既約部分とにわかれる. したがって $M = M_0 \oplus M_1$ と分解して, M_0 は0を固有値にもつ既約部分の直和, M_1 は1を固有値にもつ既約部分の直和とすることができる.

さて M_0 に注意すれば S_α 自身は M に入っている1つの既約表現の表現空間になっているから, S_α は M_0 の既約成分の1つである. したがって $M_0 = M_0' \oplus S_\alpha$ と分解することにする.

いま任意の $H \in \mathfrak{h}$ をとってくる. $H = H_0 + aH_\alpha$ で $\alpha(H_0) = 0$ とすることができる. 明らかに H_0 で生成された (複素次元) 1次元の線形空間は M_0' の既約成分になっている. すなわち $M_0' = M_0'' \oplus \mathrm{Ker}\, \alpha \oplus S_\alpha$ と分解することができる. いま M_0'' が0であることをいう. まず $L_{c\alpha}(c \neq 0)$ の元は $\mathrm{ad}\, H_\alpha$ の $c\alpha(H_\alpha) \neq 0$ を固有値とする固有ベクトルであるから $\mathrm{ad}\, H_\alpha$ の固有値を0とするベクトルは $\mathfrak{h}$ の元でなければならない. ところで $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{Ker}\, \alpha \oplus S_\alpha$ であるから $M_0'' = 0$ となる. したがって $M_0' = \mathrm{Ker}\, \alpha \oplus S_\alpha = \mathfrak{h} + S_\alpha$ であることがわかる.

これから $\mathrm{ad}\, H_\alpha$ の M における偶数の固有値は 0 と ± 2 しかないことがわかる．これから 2α の形のものは ± 4 の固有値をもたなければならないからルートでないことがわかる．逆に $\frac{1}{2}\alpha$ がルートならば $\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ となって $\alpha = 2\alpha_0$ の形になるため $\frac{1}{2}\alpha$ がルートでないことがわかる．いま 1 が $\mathrm{ad}\, H_\alpha$ の M のなかの固有値になるためには $2c = 1$ とならなければならないから，$c = \frac{1}{2}$ となりこれはあり得ないことがわかるから $M_1 = 0$ であることがわかる．すなわち $M = \mathrm{Ker}\, \alpha \oplus S_\alpha = \mathfrak{h} + S_\alpha$ であることがわかった．これから $\dim L_\alpha = 1$ であり α のスカラー倍でルートになるのは $\pm\alpha$ しかないことがわかった．

(iii), (iv), (v) は同時に証明する．いまルート β が $\beta \neq \pm\alpha$ とすれば，$K = \sum_i L_{\beta+i\alpha}$ でここに i は整数を走るものとする．この $L_{\beta+i\alpha}$ のなかには $L_0 = \mathfrak{h}$ は入ってこない．(i), (ii) の証明と同じく ρ を定義すれば，(ρ, K) は $\mathfrak{sl}(2, C)$ の表現になっている．それぞれの $L_{\beta+i\alpha}$ は 1 次元であって，$\mathrm{ad}\, H_\alpha$ の $\beta(H_\alpha) + 2i$ の固有値になっている．したがってこのなかに固有値が 0 または 1 となるものは 1 次元しかない．また固有値が 0 と 1 と両方が入っていることはない．したがって (ρ, K) は $\mathfrak{sl}(2, C)$ の既約表現になっている．したがって $\mathrm{ad}\, H_\alpha$ の固有値は $m, m-2, \cdots, -m$ の形である．すなわち $\beta(H_\alpha) + 2q$（または $\beta(H_\alpha) - 2p$）がルートとなるような最大の整数を q（または p）とすれば，$\beta + i\alpha$ の形でルートになるものは

$$\beta - p\alpha, \quad \beta - (p-1)\alpha, \quad \cdots, \quad \beta + q\alpha$$

となる．これを β の α- 系列という．また

$$-(\beta(H_\alpha) + 2q) = \beta(H_\alpha) - 2p$$

であるから $p - q = \beta(H_\alpha)$ となる．これから

$$\beta - \beta(H_\alpha)\alpha = \beta - (p-q)\alpha$$

が再びルートになることは明らかである．

さて，§4 の補題 4 を上の K について考えれば，$\beta + i\alpha$ と $\beta + (i+1)\alpha$ とがルートのときは $\mathrm{ad}\, X_\alpha$ は $L_{\beta+i\alpha}$ を $L_{\beta+(i+1)\alpha}$ の上に移す．すなわち $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ がルートのときは $\mathrm{ad}\, X_\alpha$ は L_β を $L_{\alpha+\beta}$ の上に移す．すなわち $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$ となる．

(vi) は $\mathfrak{h}^*$ がルートで生成されることと $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ から明らかである．■

さて以上の Cartan 分解が $\mathfrak{sl}(n, C)$ の場合にどうなっているかみることにしよう．まず前にいったように Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{sl}(n, C)$ のなかの対角線行列の全体である．

さて $\mathfrak{h}$ の任意の元 H は

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

と表される．いま $\Lambda_i(H) = a_i$ によって Λ_i を定義すれば明らかに $\Lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ である．さらに $\alpha_{ij} = \Lambda_i - \Lambda_j$ と α_{ij} を定義する．明らかに $H = \mathfrak{h}$ ならば

$$H = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(H) E_{ii}$$

が成立するから

$$[H, E_{ij}] = (\Lambda_i(H) - \Lambda_j(H)) E_{ij} = \alpha_{ij}(H) E_{ij}$$

となるから $i \neq j$ ならば α_{ij} がルートであり $L_{\alpha_{ij}}$ が E_{ij} で生成されることがわかる．

いま $\alpha_{ij}(i \neq j)$ が $\mathfrak{sl}(n, C)$ のすべてのルートであることを証明するために，この形以外のルート β が存在するとして $X \in L_\beta$ で $X \neq 0$ とする．このとき

$$X = H_0 + \sum_{i \neq j} x_{ij} E_{ij}, \qquad H_0 \in \mathfrak{h}$$

と表すことができる．

さて任意の $H \in \mathfrak{h}$ に対して

$$[H, X] = \sum_{i \neq j} x_{ij} [H, E_{ij}] = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}(H) x_{ij} E_{ij}$$
$$[H, X] = \beta(H) X = \beta(H) H_0 + \sum_{i \neq j} \beta(H) x_{ij} E_{ij}$$

となる．ところで H_0 と E_{ij} とは一次独立であるから $\beta \neq 0$ から $H_0 = 0$ がでる．また $x_{ij} \neq 0$ とすれば $\alpha_{ij}(H) = \beta(H)$ となって β が α_{ij} と一致することがわかる．

以上によって $\alpha_{ij}(i \neq j)$ がすべてのルートであり，$L_{\alpha_{ij}}$ が E_{ij} で生成されることがわかった．

明らかに $-\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ となっている． もし $L_{\alpha_{ij}}$ の代りに L_{ij} とかけば L_{ij} は E_{ij} によって生成されるからみやすい．この場合$H_{\alpha_{ij}}$ を H_{ij} とかけば

$$H_{ij} = [E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$$

となる．さらに $\alpha = \alpha_{ij}$ とすれば

$$\kappa(X_\alpha, Y_\alpha) = 2n\mathrm{Tr}(X_\alpha Y_\alpha) = 2n\mathrm{Tr}(E_{ii}) = 2n$$

したがって $T_{\alpha_{ij}}$ を T_{ij} とかけば

$$T_{ij} = \frac{1}{2n} H_{ij} = \frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj})$$

となる．

一般の性質はすべてこの形から直接の計算で容易に確かめることができる.

以下 $\mathfrak{sl}(n, C)$ の Cartan 分解について議論するときはいつでもこの記号を用いるものとする.

次に $\mathfrak{h}$ の次元は明らかに $n-1$ となる. したがって今後は $l=n-1$ とおいて $\dim\mathfrak{h}=l$ となる.

ルートの全体は $\mathfrak{h}^*$ を生成するから $\mathfrak{h}^*$ の基底として $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \cdots, \alpha_{n-1\,n}$ をとればよいこととする. いま

$$\alpha_i = \alpha_{i\,i+1} = \Lambda_i - \Lambda_{i+1}$$

と α_i を定義すれば $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ が $\mathfrak{h}^*$ の基底となっている. $l, \alpha_1, \cdots, \alpha_l$ も $\mathfrak{sl}(n, C)$ のときは固定して用いることにする.

§7. ルート系と Weyl 群

L を複素半単純線形リー代数, $\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数, Φ をそのルート系として

$$L = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$$

をその Cartan 分解とする.

Φ が $\mathfrak{h}^*$ を張るから Φ から適当に $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ を選んで $\mathfrak{h}^*$ の基底とする. いま $\gamma\in\mathfrak{h}^*$ とすれば, $T_\gamma\in\mathfrak{h}$ で

$$H\in\mathfrak{h} \Longrightarrow \gamma(H) = \kappa(T_\gamma, H)$$

となる.

いま $\gamma, \gamma'\in\mathfrak{h}^*$ とするとき

$$(\gamma, \gamma') = \kappa(T_\gamma, T_{\gamma'})$$

によって内積 (γ, γ') を定義する.

いま β をルートとして

$$\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i\alpha_i$$

とするとき, c_i が有理数になることを証明する. まず

$$(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{l} c_i(\alpha_i, \alpha_j) \qquad j=1, \cdots, l$$

したがって次の式を得る:

$$\frac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} c_i \qquad j=1, \cdots, l$$

ところで前節の定理 4 によって $\beta(H_\alpha)$ は整数であるから

$$\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2\beta(T_\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = \beta(H_\alpha) \in \boldsymbol{Z}$$

となる．したがって上の式は整数を係数とする c_i の連立方程式になる．また κ は非退化で $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ は $\mathfrak{h}^*$ を張るから (α_i, α_j) の作る行列には逆が存在する．したがって c_i が求めることができて答えが有理数であることがわかる．

さて $\mathrm{ad}\,H$ は $\mathfrak{h}$ の上では固有値 0，L_α の上では固有値 $\alpha(H)$ をもつ．したがって $(\mathrm{ad}\,H)(\mathrm{ad}\,H)$ は $\mathfrak{h}$ の上では固有値 0，L_α の上では固有値 $(\alpha(H))^2$ をもつ．

$$L = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$$

であるから次の式が成立する：

$$\kappa(H,H) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\,H)(\mathrm{ad}\,H)) = \sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha(H))^2$$

したがって κ は双一次形式であるから

$$\kappa(H,H') = \sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(H)\alpha(H')$$

が成立して $\gamma,\delta \in \mathfrak{h}^*$ に対しては

$$(\gamma,\delta) = \kappa(T_\gamma, T_\delta) = \sum_\alpha \alpha(T_\gamma)\alpha(T_\delta) = \sum_\alpha(\alpha,\lambda)(\alpha,\delta)$$

となる．特別な場合，β がルートならば

$$(\beta,\beta) = \sum_\alpha(\alpha,\beta)^2$$

となる．しかも右辺は ≥ 0 となる．

いま $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ から生成された実線形空間を $\mathcal{E}$ とかくことにする．ここで我々が考えているのは複素リー代数であるが，$\mathcal{E}$ はあくまでも実線形空間であることが大切である．いま $\gamma \in \mathcal{E}$ とすれば同じく

$$(\gamma,\gamma) = \sum_\alpha (\alpha,\gamma)^2$$

となる (α,γ) は実数だから右辺は ≥ 0 となる．また $=0$ となるのは，すべてのルート α について $(\alpha,\gamma)=0$ となるときである．これは κ の非退化から $\gamma=0$ となることがわかる．

すなわち $\mathcal{E}$ は l 次元の実ユークリッド空間であり，(　,　) はその内積で $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ はその 1 つの一次独立のベクトルになっていることがわかる．

この $\mathcal{E}$ のなかにすべてのルートが入っている，すなわち $\Phi \subseteq \mathcal{E}$ となっている．

もちろん $\mathcal{E}$ のなかの距離や直交関係はこの内積（　,　）によって定義されるものとする．

いま $\gamma \in \mathcal{E}$ で $\alpha \in \Phi$ のとき $\langle\gamma,\alpha\rangle$ を次の式で定義する：

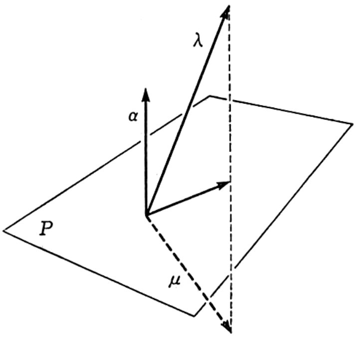
$$\langle \gamma, \alpha \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

前にのべたことから β がルートならば

$$\langle \beta, \alpha \rangle \in \Phi \quad で \quad \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Phi$$

が成立している.

P を $\mathcal{E}$ の超平面（すなわち $l-1$ 次元の実線形部分空間）とするとき，P に関するリフレクションを図のように λ を P に関して，その反対側で対称の位置の μ に移す写像と定義する．すなわち，λ と μ とを結んだ線が P と交わる点は λ の P への射影になっていて，この点は λ と μ との中点になっている.



明らかなことであるが，P に関するリフレクションは P のベクトルを動かさない．しかも P に関するリフレクションで動かないベクトルは P の上のベクトルに限る.

いま P_α を α と直交するベクトルの全体，すなわち

$$P_\alpha = \{\xi \in \mathcal{E} \mid (\xi, \alpha) = 0\}$$

と定義する．P_α に関するリフレクションを σ_α とかく．λ の α への射影は

$$\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha = \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle \alpha}{2}$$

であるから，次の式が直ちに得られる：

$$\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha$$

これから $\sigma_\alpha = \sigma_{-\alpha}$ が直ちにわかる.

特別な場合として α, β がルートのときは $\sigma_\alpha(\beta)$ は再びルートとなる.

σ_α は内積を不変にする．すなわち

$$\begin{aligned}(\sigma_\alpha(\lambda), \sigma_\alpha(\mu)) &= \left(\lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha,\ \ \mu - \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha\right) \\ &= (\lambda, \mu) - \frac{2(\mu, \alpha)(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} - \frac{2(\lambda, \alpha)(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} + \frac{4(\lambda, \alpha)(\mu, \alpha)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)(\alpha, \alpha)} \\ &= (\lambda, \mu)\end{aligned}$$

したがって σ_α はベクトルの間の角度や距離をかえない．

さらに $\sigma_\alpha=\sigma_\alpha^{-1}$ で $\sigma_\alpha(\alpha)=-\alpha$ になっている．

さて

$$\{\sigma_\alpha|\alpha\in\Phi\}$$

から生成される $Gl(\mathcal{E})$ の部分群を $\mathcal{W}$ とかいて Φ の Weyl 群という．$\alpha,\beta\in\Phi$ のとき $\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi$ となるから，σ_α は Φ の元を置換する．したがって $\mathcal{W}$ はこの Φ の置換群の部分群と同型になっている．Φ は有限であるから $\mathcal{W}$ も有限である．

$\sigma\in Gl(\mathcal{E})$ のときに，$\sigma(\Phi)$ は

$$\sigma(\Phi)=\{\sigma(\alpha)|\alpha\in\Phi\}$$

によって定義される．

補題 1.　$\sigma\in Gl(\mathcal{E})$ が $\sigma(\Phi)=\Phi$ をみたし，σ は $\mathcal{E}$ のある超平面 P のベクトルを動かさず，その上ある Φ の元 α があって $\sigma(\alpha)=-\alpha$ になったとする．このとき $\sigma=\sigma_\alpha$ で $P=P_\alpha$ となる．

［証明］　$\tau=\sigma\sigma_\alpha=\sigma\sigma_\alpha^{-1}$ とおく．明らかに $\tau(\Phi)=\Phi$ で $\tau(\alpha)=\alpha$ である．τ が恒等写像（すなわち $\tau(\lambda)=\lambda$ がすべての $\lambda\in\mathcal{E}$ に成立する）であることをいえば十分である．

τ は明らかに Φ の置換になっている．Φ の置換群は有限群であるから，τ^k が Φ の置換として単位元になっているものがある．ところで Φ は $\mathcal{E}$ を張って，τ^k は線形写像であるから

$$\tau^k=E\qquad(E\text{ は単位行列})$$

となる正の整数 k が存在することがでてくる．

一方，α と P とは $\mathcal{E}$ を張るから，$\mathcal{E}$ の任意の元 λ に対して $\lambda=c\alpha+\beta$ となる $c\in\boldsymbol{R}$，$\beta\in P$ がただ一通り存在する．このとき

$$\varphi(\lambda)=\langle\beta,\alpha\rangle$$

とおけば

$$\begin{aligned}\tau(\lambda)&=c\tau(\alpha)+\tau(\beta)\\&=c\alpha+\sigma(\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha)\\&=c\alpha+\beta+\langle\beta,\alpha\rangle\alpha\\&=\lambda+\varphi(\lambda)\alpha\end{aligned}$$

となる．$\tau(\alpha)=\alpha$ であるから，この式から直ちに

$$\lambda = \tau^k(\lambda) = \lambda + k\varphi(\lambda)\alpha$$

となって $\varphi(\lambda)=0$. すなわち $\tau(\lambda)=\lambda$ がでて証明が終った. ■

定理 1. $\mathcal{W}$ を Φ の Weyl 群とする. もし $\sigma \in Gl(\mathcal{E})$ が Φ を不変にするならば, 次の 2 つの性質が成立する：

(i) $$\alpha \in \Phi \implies \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$$

(ii) $$\alpha, \beta \in \Phi \implies \langle \beta, \alpha\rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha)\rangle$$

[証明] $\alpha \in \Phi$ とすれば $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ は明らかに Φ を不変にする. また

$$\lambda \in \sigma(P_\alpha) \implies \sigma^{-1}(\lambda) \in P_\alpha \implies \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\lambda) = \lambda$$

となるから $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ は $\sigma(P_\alpha)$ のすべての点を動かさない. さらに次の式は明らかである：

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = -\sigma(\alpha)$$

以上から補題 1 によって $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ がでた.

さらに $\beta \in \Phi$ とすれば

$$\begin{aligned}\sigma(\beta) - \langle\beta,\alpha\rangle\sigma(\alpha) &= \sigma(\beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha) = \sigma\sigma_\alpha(\beta)\\ &= \sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - \langle\sigma(\beta),\sigma(\alpha)\rangle\sigma(\alpha)\end{aligned}$$

これから (iii) が得られた. ■

さて α, β をルートとする. このとき解析幾何でよく知られたように, α, β の長さを $\|\alpha\|$, $\|\beta\|$ とかき, ベクトル α とベクトル β との間の角を θ とすれば

$$(\alpha, \beta) = \|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta$$

となる. したがって次の式が得られる：

$$\langle\beta,\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos\theta$$

$$\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 4\cos^2\theta$$

ところで $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle \in \boldsymbol{Z}$ であるから $4\cos^2\theta$ は負でない整数である. したがって $\langle\alpha,\beta\rangle$ と $\langle\beta,\alpha\rangle$ は一方が正ならば他方も正, 一方が負ならば他方も負になる. $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ であるから, $\alpha \neq \pm\beta$ で $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ のときには次ページの表のものだけが存在することが容易にわかる.

補題 2. α, β はルートで $\alpha \neq \pm\beta$ とする. もし $(\alpha,\beta)>0$ ならば $\alpha-\beta$ はルートである. またもし $(\alpha,\beta)<0$ ならば $\alpha+\beta$ はルートである.

[証明] $(\alpha,\beta)<0$ の場合は β を $-\beta$ でおきかえれば最初の場合になるから最初の場

合だけを証明する．いま $(\alpha,\beta)>0$ ならば $\langle\alpha,\beta\rangle>0$ であるから $\|\beta\|\geq\|\alpha\|$ ならば下の表から $\langle\alpha,\beta\rangle=1$ ならば $\sigma_\beta(\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ となるからよい．次に $\|\alpha\|>\|\beta\|$ ならば $\langle\beta,\alpha\rangle=1$ となり同様に $\beta-\alpha\in\Phi$, したがって $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ となってよい．■

$\langle\alpha,\beta\rangle$	$\langle\beta,\alpha\rangle$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	不定
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

いま β の α-系列を

$$\beta-p\alpha,\quad \beta-(p-1)\alpha,\quad \cdots,\quad \beta+q\alpha$$

とする．このとき

$$\sigma_\alpha(\beta+q\alpha)=\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha-q\alpha=\beta-p\alpha$$

$$\sigma_\alpha(\beta-p\alpha)=\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha+p\alpha=\beta+q\alpha$$

となる．すなわち σ_α は β の α-系列の順序をちょうど逆にする変換になっている．さて上の表をみれば β の α-系列の長さは高々 4 であることがわかる．

ルート系 Φ の部分集合 Δ が次の条件をみたすときに Δ は Φ の基本系であるという：

（i）　Δ は $\mathcal{E}$ の基底になっている．

（ii）　どのルートも Δ の元の整数を係数とする一次結合で表される．しかもその係数はすべて負でないか，またはすべて正でないかのどちらかである．

まず基本系の一般論をする前に $\mathfrak{sl}(n,C)$ のとき前節の終りのように $\Phi=\{\alpha_{ij}|i\neq j\}$ と選び $\alpha_i=\alpha_{i\,i+1}$ としたときに $\Delta=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l\}$ が Φ の基本系になっていることをいおう．Δ が $\mathcal{E}$ の基底になっていることは明らかであろう．いま $\alpha_{ij}\in\Phi$ ととれば

$$i<j \quad ならば \quad \alpha_{ij}=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1}$$

$$j<i \quad ならば \quad \alpha_{ij}=-\alpha_j-\alpha_{j+1}-\cdots-\alpha_{i-1}$$

となっているので Δ が Φ の基本系であることがわかった．以下 $\mathfrak{sl}(n, C)$ を考えるときにはいつでもこの基本系を考えることにする．

さて一般の場合に戻って考えることにする．

基本系 Δ に属するルートを単純ルートという．いま β をルートとして

$$\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$$

とするとき β の高さ $\mathrm{ht}\,\beta$ を

$$\mathrm{ht}\,\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha$$

によって定義する．さらに β が上の形のときすべての $\alpha\in\Delta$ について $k_\alpha \geq 0$ のとき β を正のルートといい，すべての $\alpha\in\Delta$ について $k_\alpha \leq 0$ のとき負のルートという．正のルートの全体を Φ^+ で表し，負のルートの全体を Φ^- で表すことにする．これらの概念はすべて Δ のとり方に依存するわけであるが，いつでも Δ を1つ固定して考えることにする．

補題 3. Δ は Φ の基本系とする．$\alpha, \beta\in\Delta$ で $\alpha\neq\beta$ とすれば $(\alpha,\beta)\leq 0$ であり，$\alpha-\beta$ はルートではない．

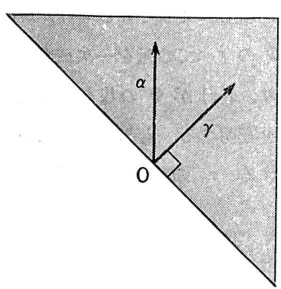
［証明］ もし $(\alpha,\beta)>0$ とすれば，もちろん $\alpha\neq-\beta$ となる．$\alpha\neq\beta$ であるから前補題2により $\alpha-\beta$ はルートとなる．これは Δ の基本系の条件の (ii) に反する．■

定理 2. Φ には基本系が存在する．

この証明をするために $\gamma\in\mathcal{E}$ に対して $\Phi^+(\gamma)$ を次の式で定義する：

$$\Phi^+(\gamma) = \{\alpha\in\Phi \mid (\gamma,\alpha)>0\}$$

$(\gamma,\alpha)>0$ ということは γ と α との間の角が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ までの間ということだから図をかくと次のようになる．すなわち影の部分に入っているルートの全体が $\Phi^+(\gamma)$ になっている．



$\mathcal{E}$ の点 γ が正則であるということをどんな $\alpha\in\Phi$ をとっても γ が超平面 P_α のなかに入っていないことと定義する．すなわち式でかけば $\gamma\in\mathcal{E}-\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$ となる．γ が正則でないときは特異であるという．

γ が正則であるということは，すべての $\alpha\in\Phi$ について $(\alpha,\gamma)\neq 0$ ということになっている．いま γ が正

則とすれば，$\Phi=\Phi^+(\gamma)\cup-\Phi^+(\gamma)$ になっていることは明らかである．

いま $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ とするとき，α が γ-分解可能ということを $\alpha=\beta_1+\beta_2$ となるような $\beta_1,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$ が存在することをいう．そうでないときは γ-分解不可能という．

さらに γ が正則のとき，$\Delta(\gamma)$ をすべての γ-分解不可能な $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ の全体と定義する．定理2は次の定理3の系になっている．

定理 3.　$\gamma\in\mathcal{E}$ が正則ならば $\Delta(\gamma)$ は Φ の基本系になっている．またすべての基本系は $\Delta(\gamma)$ の形になっている．

［証明］　まず $\Phi^+(\gamma)$ のルートが $\Delta(\gamma)$ の元の負でない整数を係数とする一次結合で表されることを証明する．もしそうでない $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ があったとする．そのような α のなかで (γ,α) が一番小さいものをあらためて α とする．α は $\Delta(\gamma)$ の元ではないから，$\alpha=\beta_1+\beta_2$ で β_1,β_2 が共に $\Phi^+(\gamma)$ の元であるような β_1,β_2 が存在する．ところで

$$(\gamma,\alpha)=(\gamma,\beta_1)+(\gamma,\beta_2)$$

となって $\beta_1,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$ から，右辺の2項は共に正となる．したがって $(\gamma,\alpha)>(\gamma,\beta_1)$，$(\gamma,\beta_2)$ となる．

したがって α のとり方から，β_1 と β_2 とが共に $\Delta(\gamma)$ の元の負でない整数を係数とする一次結合で表される．したがって α も $\Delta(\gamma)$ の元の負でない整数の一次結合で表されることになり矛盾する．

次に $\alpha,\beta\in\Delta(\gamma)$ で $\alpha\neq\beta$ ならば $(\alpha,\beta)\leq 0$ となることを証明する．もし $(\alpha,\beta)>0$ とすれば，$\alpha\neq-\beta$ は明らかだから補題2によって $\alpha-\beta\in\Phi$ となる．したがって $\alpha-\beta$ か $\beta-\alpha$ の一方が $\Phi^+(\gamma)$ に入っている．もし $\alpha-\beta\in\Phi^+(\gamma)$ とすれば $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ となり，α が γ-分解不可能なことに反する．もし $\beta-\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ とすれば $\beta=\alpha+(\beta-\alpha)$ となり，やはり β が γ-分解不可能なことに反する．

以上によってもし $\Delta(\gamma)$ が一次独立なことがわかれば，$\Delta(\gamma)$ は $\Phi^+(\gamma)$ を，したがって Φ のすべての元を一次結合で表すことがわかるから $\Delta(\gamma)$ が $\mathcal{E}$ の基底であることがわかり，$\Delta(\gamma)$ が Φ の基本系になっていることがわかる．したがって $\Delta(\gamma)$ が一次独立のことを証明する．もしそうでないとすれば $\sum r_\alpha\alpha=0$ $(\alpha\in\Delta(\gamma), r_\alpha\in\boldsymbol{R})$ となる r_α が存在する．r_α のなかで正のものを s_α とかき，負のものを t_α とかけば上の式は

$$\sum s_\alpha\alpha=\sum t_\alpha\alpha$$

となっている．いま $\varepsilon=\sum s_\alpha\alpha$ とおけば

$$(\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{\alpha,\beta}s_\alpha t_\beta(\alpha,\beta)\leq 0$$

ここで上に証明した $(\alpha,\beta)\leq 0$ を用いた．これから $\varepsilon=0$ がでてくるから

$$0=(\gamma,\varepsilon)=\sum s_\alpha(\gamma,\alpha)$$

となるが $s_\alpha>0$, $(\gamma,\alpha)>0$ であるから，このような s_α が1つもないことがわかる．同様に t_α も1つもないことがわかるから証明が完了した．

最後にすべての基本系 $\varDelta$ が $\varDelta(\gamma)$ の形であることを証明する．いま $\varDelta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ として $\mathcal{E}$ のなかで $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_l$ の張る超平面に垂直な単位ベクトルを β_i として，α_i の β_i への射影を γ_i とする．いま任意に正の実数 $r_1, \cdots, r_l$ をとって

$$\gamma=\sum_{i=1}^{l} r_i\gamma_i$$

と定義する．このとき次の計算が成立する：

$$\begin{aligned}(\gamma,\alpha_i)&=\sum_j r_j(\gamma_j,\alpha_i)=r_i(\gamma_i,\alpha_i)\\&=r_i(\gamma_i,\gamma_i)=r_i\|\gamma_i\|^2>0\end{aligned}$$

したがって $\varDelta\subseteq\Phi^+(\gamma)$ であることがわかる．したがって $\Phi^+\subseteq\Phi^+(\gamma)$, 同様にして $\Phi^-\subseteq-\Phi^+(\gamma)$ がわかるから，$\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$, $\Phi^-=-\Phi^+(\gamma)$ であることがわかる．これから $\varDelta$ の元は明らかに γ-分解不可能な元になっているから $\varDelta\subseteq\varDelta(\gamma)$ となるが $\varDelta$ も $\varDelta(\gamma)$ も一次独立で $\mathcal{E}$ を生成するから $\varDelta=\varDelta(\gamma)$ のことがわかった．■

さて以下において Φ の基本系 $\varDelta$ を1つ固定して考えることにする．

補題 4. $\alpha\in\varDelta$ とすれば

$$\sigma_\alpha(\Phi^+-\{\alpha\})=\Phi^+-\{\alpha\}$$

［証明］ $\beta\in\Phi^+-\{\alpha\}$ とすれば $\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha$．ところで β には α 以外の $\varDelta$ の元 α' が入っているから $\sigma_\alpha(\beta)$ の α' の係数は正，したがって $\sigma_\alpha(\beta)$ はやはり α 以外の正のルートとなる．■

いま δ を次の式で定義する（今後この記号を用いる）．

$$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+}\beta$$

系 $\alpha\in\varDelta$ とすれば $\sigma_\alpha(\delta)=\delta-\alpha$.

［証明］ 上の補題4より明らか．■

補題 5. $\beta_1, \cdots, \beta_k, \beta\in\varDelta$ として σ_{β_i} を σ_i とかくことにする．このとき $\sigma_1\cdots\sigma_k(\beta)\in\Phi^-$ とするならば，ある $1\leq j\leq k$ が存在して

$$\sigma_1\cdots\sigma_k\sigma_\beta=\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_k$$

となる.

［証 明］ いま $\gamma_i=\sigma_{i+1}\cdots\sigma_k(\beta)$ $(0\leq i\leq k-1)$ とおき，$\gamma_k=\beta$ とおく．$\gamma_0\in\Phi^-$ で $\gamma_k\in\Phi^+$ であるから，$\gamma_j\in\Phi^+$ となる最小の j を j とかくことにすれば，$\sigma_j(\gamma_j)=\gamma_{j-1}\in\Phi^-$ であるから，補題4によって

$$\gamma_j=\beta_j$$

したがって

$$\sigma_j=\sigma_{\gamma_j}=\sigma_{\sigma_{j+1}\cdots\sigma_k(\beta)}=\sigma_{j+1}\cdots\sigma_k\sigma_\beta(\sigma_{j+1}\cdots\sigma_k)^{-1}$$

ゆえに次の式によって証明が完成された：

$$\begin{aligned}\sigma_1\cdots\sigma_k\sigma_\beta&=\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_k\sigma_\beta(\sigma_{j+1}\cdots\sigma_k)^{-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_k\sigma_\beta\\&=\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}\sigma_{j+1}\cdots\sigma_k\end{aligned}$$ ■

系 $\sigma\in\mathcal{W}$ として $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_k$ で $\beta_1, \cdots, \beta_k\in\Delta$ で k はこのような k のなかで最小とする．このとき $\sigma(\beta_k)\in\Phi^-$ となる．

［証 明］ $\sigma(\beta_k)\in\Phi^+$ と $\sigma_1\cdots\sigma_{k-1}(\beta_k)\in\Phi^-$ とは同等であることを注意すれば，補題5から直ちにでる．■

次に，より基本的な補題をここにあげておく．

補 題 6. $\alpha\in\Phi^+$ が単純ルートでないとすれば，ある $\beta\in\Delta$ で $\alpha-\beta$ が再びルートになっているものがある．このとき $\alpha-\beta$ は正のルートである．

［証 明］ いますべての単純ルート β について $(\alpha,\beta)\leq 0$ であったとすれば，α を Δ の元の一次結合で表して

$$\alpha=\sum_{\beta\in\Delta}c_\beta\beta \qquad c_\beta\geq 0$$

とすれば

$$0<(\alpha,\alpha)=\sum_{\beta\in\Delta}c_\beta(\alpha,\beta)\leq 0$$

となって矛盾するから，ある $\beta\in\Delta$ について $(\alpha,\beta)>0$ となっている．したがって $\alpha-\beta$ はルートとなる．

α には β 以外の単純ルートが正の係数で入っているから，$\alpha-\beta$ にもその単純ルートは正の係数で入っている．したがって $\alpha-\beta$ の単純ルートの係数はすべて正でなければならない．■

系 いま $\beta\in\Phi^+$ とするとき，単純ルート $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ をとって $\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ で

すべての部分和 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ がルートであるようにできる.

［証 明］ 補題6によって $\beta = \beta_1 + \alpha_k$ で β_1 が正のルートであるようにできるから $\mathrm{ht}\,\beta$ についての帰納法で証明すれば明らかである. ■

さて超平面 P_α $(\alpha \in \Phi)$ の全体は $\mathcal{E}$ を有限個の領域に分割する. そのそれぞれを $\mathcal{E}$ の Weyl 領域と呼ぶ. γ を正則な $\mathcal{E}$ の元とするとき γ の属する Weyl 領域を $\mathcal{C}(\gamma)$ で表すことにする.

γ, γ' が $\mathcal{E}$ の正則な元とするとき, $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$ はすべての $\alpha \in \Phi$ について γ と γ' とが P_α の同じ側に入っていることを意味する. すなわち

$$(\gamma, \alpha)(\gamma', \alpha) > 0$$

であることを意味する. これは $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ と同等であり, したがって $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ とも同等である.

いま $\Delta = \Delta(\gamma)$ のとき $\mathcal{C}(\gamma)$ のことを $\mathcal{C}(\Delta)$ とかいて Δ の属する Weyl 領域という. 明らかに次の式が成立する：

$$\gamma \in \mathcal{C}(\Delta) \iff \text{すべての } \alpha \in \Delta \text{ について } (\gamma, \alpha) > 0$$

$\sigma \in \mathcal{W}$ とすれば

$$(\sigma\gamma, \sigma\alpha) = (\gamma, \alpha)$$

となるから $\sigma(\mathcal{C}(\gamma)) = \mathcal{C}(\sigma\gamma)$ となる. また $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma\gamma)$ となる.

定 理 4. Δ を Φ の基本系とすれば次の性質が成立する：

（i） $\gamma \in \mathcal{E}$ を正則とすれば, $\mathcal{W}$ の元 σ ですべての $\alpha \in \Delta$ について $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ となるものが存在する.

(ii) Δ' を Φ の別の基本系とすれば, $\sigma(\Delta') = \Delta$ となる $\mathcal{W}$ の元 σ が存在する.

(iii) α をルートとすれば, $\sigma(\alpha) \in \Delta$ となる $\mathcal{W}$ の元 σ が存在する.

(iv) $\mathcal{W}$ は $\sigma_\alpha (\alpha \in \Delta)$ によって生成される.

（v） $\sigma \in \mathcal{W}$ で $\sigma(\Delta) = \Delta$ とすれば $\sigma = 1$ ($\mathcal{W}$の単位元) である.

［証 明］ いま $\mathcal{W}'$ を $\sigma_\alpha (\alpha \in \Delta)$ の全体から生成された $\mathcal{W}$ の部分群として, （i）, (ii), (iii) を $\mathcal{W}'$ に証明して, そのあとで $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ を証明する.

（i） $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ として $\sigma \in \mathcal{W}'$ を $(\sigma(\gamma), \delta)$ が最大になるように選ぶ. もし α が単純ルートならばもちろん $\sigma_\alpha \sigma \in \mathcal{W}'$ である. したがって σ の定義より

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

となるから，すべての $\alpha \in \Delta$ について $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ であることがわかる．$(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$ は $(\gamma, \sigma^{-1}(\alpha)) = 0$ を意味して γ の正則性に反するから $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ であることがわかる．

すなわち σ は $C(\gamma)$ を $C(\Delta)$ に移すことになっている．

(ii)　(i) で証明されたように $\mathcal{W}'$ の元は任意の $C(\gamma)$ を $C(\Delta)$ に移すから，$\Delta' = \Delta(\gamma)$ とすれば Δ' は Δ に移ることになる．

(iii)　(ii) によって $\alpha \in \Phi$ とするとき，$\alpha \in \Delta'$ となるような基本系 Δ' が存在することをいえばよい．$c\alpha$ の形のルートは $\pm\alpha$ だけであるから，$\beta \neq \pm\alpha$ となるルート β については P_β は P_α とは異なる超平面である．$\beta \neq \pm\alpha$ となる β の数は有限個であるから $P_\alpha \cap P_\beta$ $(\beta \neq \pm\alpha)$ は有限個の P_α の超平面である．したがって $\gamma \in P_\alpha$ ですべてのルート $\beta \neq \pm\alpha$ について $\gamma \notin P_\beta$ となるような γ が存在する．γ' を γ に十分近いベクトルを選べば

$$(\gamma', \alpha) = \varepsilon > 0 \text{ で } \beta \neq \pm\alpha \text{ ならば } \quad |(\gamma', \beta)| > \varepsilon$$

が成立するようにできる．明らかに $\alpha \in \Delta(\gamma')$ となっている．

(iv)　ここで $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ を証明する．すべてのルート α について $\sigma_\alpha \in \mathcal{W}'$ をいえばよい．(iii) によって $\beta = \sigma(\alpha) \in \Delta$ となるような $\sigma \in \mathcal{W}'$ が存在する．したがって $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ となるから $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in \mathcal{W}'$ となって証明された．

(v)　いま $\sigma(\Delta) = \Delta$ として $\sigma \neq 1$ とする．このとき (iv) によって σ は $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in \Delta)$ の形にかかれる．この長さを最小にすれば補題 5 の系に反する．■

いま $\sigma \in \mathcal{W}$ とするとき，$\sigma = \sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_{\beta_k} (\beta_1, \cdots, \beta_k \in \Delta)$ で k がこの形で最小になるようにしたときに，この形 $\sigma = \sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_{\beta_k}$ を還元されたといい，k を σ の長さといって $l(\sigma)$ で表す．さらに $l(1) = 0$ と定義する．いまさらに $n(\sigma)$ を $\alpha \in \Phi^+$ なる α で $\sigma(\alpha) \in \Phi^-$ となる α 全体の個数とすれば次の定理が成立する：

定理 5.　$\sigma \in \mathcal{W}$ とすれば $l(\sigma) = n(\sigma)$.

［証明］ $l(\sigma)$ についての数学的帰納法で証明する．$l(\sigma) = 0$ ならば $\sigma = 1$ であるから $n(\sigma) = 0$ となって明らか．したがって $l(\tau) < l(\sigma)$ となるすべての $\tau \in \mathcal{W}$ に対して定理が成立しているものとして，$l(\sigma) = n(\sigma)$ を証明する．σ を還元された形にかいて

$$\sigma = \sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_{\beta_k} \qquad \beta_1, \cdots, \beta_k \in \Delta$$

とおく．ここに $k = l(\sigma)$ である．$\beta_k = \beta$ とおけば $\sigma(\beta) \in \Phi^-$ である．したがって補題

4を用いれば $n(\sigma\sigma_\beta)=n(\sigma)-1$.

他方 $l(\sigma\sigma_\beta)=l(\sigma)-1<l(\sigma)$ であるから数学的帰納法の仮定により $l(\sigma\sigma_\beta)=n(\sigma\sigma_\beta)$ となって証明された. ■

さて Δ を Φ の1つの基本系とするとき, Weyl の領域 $C(\Delta)$ は次の形のものであった:

$$C(\Delta)=\{\gamma\in\mathcal{E}\mid \text{すべての } \alpha\in\Delta \text{ について } (\gamma,\alpha)>0\}$$

いまこの $C(\Delta)$ の閉包 $\bar{C}(\Delta)$ を Weyl の閉領域という. 上の形で定義をすれば

$$\bar{C}(\Delta)=\{\gamma\in\mathcal{E}\mid \text{すべての } \alpha\in\Delta \text{ について } (\gamma,\alpha)\geq 0\}$$

となっている.

補題 7. いま $\lambda,\mu\in\bar{C}(\Delta)$ として, $\sigma\in\mathcal{W}$ で $\sigma\lambda=\mu$ とする. このとき σ は $\sigma_{\alpha_i}\lambda=\lambda$ $(\alpha_i\in\Delta)$ となるような σ_{α_i} の積で表される. 特に $\lambda=\mu$ となる.

［証 明］ $l(\sigma)$ についての数学的帰納法で証明する. $l(\sigma)=0$ のときは明らかである. $l(\sigma)>0$ とすれば定理5により σ はある正のルートを負のルートに移す. したがって σ は Δ の元をすべて正のルートに移すことができない. したがって $\sigma\alpha\in\Phi^-$ となる $\alpha\in\Delta$ が存在する. さて

$$0\geq(\mu,\sigma\alpha)=(\sigma^{-1}\mu,\alpha)=(\lambda,\alpha)\geq 0$$

となるから $(\lambda,\alpha)=0$, したがって $\sigma_\alpha\lambda=\lambda$. したがって

$$\sigma\sigma_\alpha\lambda=\mu$$

となる. ところで $\sigma_\alpha(\Phi^+-\{\alpha\})=\Phi^+-\{\alpha\}$ であるから,

$$l(\sigma\sigma_\alpha)=n(\sigma\sigma_\alpha)=n(\sigma)-1=l(\sigma)-1$$

となる. したがって $\sigma\sigma_\alpha$ には帰納法の仮定から補題が成立している. これから明らかである. ■

ルート系 Φ の2つの部分集合 Φ_1 と Φ_2 とが直交するということを, 任意の Φ_1 の元 α と任意の Φ_2 の元 β とをとったとき $\alpha\perp\beta$ となることと定義する. Φ_1 と Φ_2 とが直交するとき $\Phi_1\perp\Phi_2$ とかくことにする.

Φ が空でない2つの直交する部分集合に分解できないとき Φ を既約であるという.

いま Δ を Φ の基本系とするとき, Δ が既約であるということを, Φ の場合と同じように, Δ が空でない2つの直交する部分集合に分解できないことと定義する. 念のために式を用いれば次の条件をみたす Δ_1,Δ_2 が存在しないということである:

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \qquad \Delta_1 \perp \Delta_2, \qquad \Delta_1 \neq \phi, \qquad \Delta_2 \neq \phi$$

定理 6. Δ を Φ の基本系とすれば，Φ が既約なことと，Δ が既約なことは同等である．

［証明］ まず Δ の既約性を仮定して Φ が既約であることを証明する．もし $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, $\Phi_1 \perp \Phi_2$ で $\Phi_1 \neq \phi$, $\Phi_2 \neq \phi$ となる Φ_1, Φ_2 があったとする．このとき $\Delta_1 = \Delta \cap \Phi_1$, $\Delta_2 = \Delta \cap \Phi_2$ とおけば明らかに $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \perp \Delta_2$ となるから Δ の既約性から，$\Delta_1 = \phi$ か $\Delta_2 = \phi$ がでる．一般性を失わないから $\Delta_2 = \phi$ とすれば $\Delta \subseteq \Phi_1$ したがって $\Delta \perp \Phi_2$ となる．ところで Δ は Φ を張るから $\Phi \perp \Phi_2$ となって矛盾する．

次に Φ が既約であることを仮定して Δ の既約性を証明する．Δ が既約でないとすると $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \perp \Delta_2$, $\Delta_1 \neq \phi$, $\Delta_2 \neq \phi$ な Δ_1, Δ_2 が存在する．

まず Φ_i を次の式で定義する：

$$\Phi_i = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in \Delta_i \text{ で } \sigma \in \mathcal{W}\}$$

定理 4 により明らかに $\Phi \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$ となる．さらに $(\alpha, \beta) = 0$ から $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ したがって $\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_\beta$ すなわち $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \sigma_\beta \sigma_\alpha$ となる．これからたとえば Δ_1 の元を α で表し Δ_2 の元を β で表せば $\mathcal{W}$ の任意の元は $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_l} \sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_{\beta_k}$ で表され，$\alpha \in \Delta_1$ とすれば $\sigma_{\beta_i}(\alpha) = \alpha$ であるから，Φ_1 の元は $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}(\alpha)$．ここで $\sigma_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j - \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \alpha_i$ であることを思いだせば Φ_1 の元は Δ_1 の元から加法と減法によって得られることがわかる．同様にして Φ_2 の元も Δ_2 の元の一次結合で表されるから $\Phi_1 \perp \Phi_2$ がわかって $\Delta_1 \subseteq \Phi_1$, $\Delta_2 \subseteq \Phi_2$ から $\Phi_1 \neq \phi$, $\Phi_2 \neq \phi$ がでるから矛盾する．■

いま Φ はルート系，$\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ はその基本系，$\mathcal{E}$ はそれから生成された実ユークリッド空間とする．このとき $\mathcal{E}$ に半順序 $\leq$ を導入する．

まず $\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_l\alpha_l$ としたとき

$$0 \leq \gamma \iff c_1 \geq 0, \ \cdots, \ c_l \geq 0$$

と定義する．次に $\mathcal{E}$ の 2 元 γ_1, γ_2 については

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \iff 0 \leq \gamma_2 - \gamma_1$$

によって $\leq$ を定義する．もちろん $\leq$ は線形順序にはならない．

補題 8. Φ は既約とする．このとき半順序 $\leq$ に関して最大となるルート β が存在する．したがって $\alpha \neq \beta$ とすれば $\mathrm{ht}\,\alpha < \mathrm{ht}\,\beta$ であり，すべての $\alpha \in \Delta$ について $(\beta, \alpha) \geq 0$ となる．いま $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ とかけば，すべての $\alpha \in \Delta$ について $k_\alpha > 0$ となる．

［証明］ いま Φ の元は有限個だから，その間で $\leq$ に関して極大となるものが存在する．その1つをとって $\beta=\sum k_\alpha\alpha$ とする．いまもし $\alpha\in\Delta$ で $(\alpha,\beta)<0$ なものが存在したとする．このとき補題2によって $\beta+\alpha$ がルートになって β の極大性に矛盾する．

したがってどんな $\alpha\in\Delta$ をとっても $(\alpha,\beta)\geq 0$ となっており，もし $\geq$ が全部 $=$ とすると β はすべての $\alpha\in\Delta$ と直交することになり，β が Δ の元の一次結合で表されることに矛盾する．したがって $(\alpha,\beta)>0$ となる $\alpha\in\Delta$ が少なくとも1つは存在する．

次に $\beta=\sum k_\alpha\alpha$ の表現を用いて次の定義をする：

$$\Delta_1=\{\alpha\in\Delta\,|\,k_\alpha>0\},\qquad \Delta_2=\{\alpha\in\Delta\,|\,k_\alpha=0\}$$

明らかに $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ が成立する．

いま $\Delta_2\neq\phi$ とすれば Δ は既約であるから，$\alpha\in\Delta_2$ で Δ_1 の元とは直交しないものが存在する．補題3から $(\beta,\alpha)\leq 0$ であり，また β の成分（すなわち Δ_1 の元）α_1 で $(\alpha_1,\alpha)\neq 0$ すなわち $(\alpha_1,\alpha)<0$ となるものがある．ゆえに $(\beta,\alpha)<0$ となって上にのべたことと矛盾する．したがってすべての $\alpha\in\Delta$ について $k_\alpha>0$ となっている．

次に β' をもう1つの極大元として $\beta=\beta'$ を証明する． 前にのべたように $\alpha\in\Delta$ で $(\alpha,\beta)>0$ となるものがある．また前にのべたように一般の Δ の元 α' については $(\alpha',\beta)\geq 0$ であるから $0<(\beta',\beta)$ となる．したがって補題2によって $\beta\neq\beta'$ とすれば $\beta-\beta'$ はルートとなる．したがって $\beta\leq\beta'$ か $\beta'\leq\beta$ が成立する． これは β,β' の極大性と $\beta\neq\beta'$ とに矛盾する． ■

Φ の既約性は次の定理でわかるように L の単純性を意味する．

定理 7. Φ を L のルート系とするとき，L が単純であることと Φ が既約であることは同等である．

［証明］ Φ を既約でないとして，$\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$，$\Phi_1\perp\Phi_2$，$\Phi_1\neq\phi$，$\Phi_2\neq\phi$ とする．

いま $\{H_\alpha|\alpha\in\Phi_i\}$ で張られる $\mathfrak{h}$ の線形部分空間を $\mathfrak{h}_i\ (i=1,2)$ として $L_i\ (i=1,2)$ を

$$L_i=\mathfrak{h}_i\oplus\sum_{\alpha\in\Phi_i}S_\alpha$$

で定義する．$\Phi_1\perp\Phi_2$ であることから $H_\alpha\in\mathfrak{h}_1$，$X_\beta\in S_\beta$，$\beta\in\Delta_2$ とすれば

$$[H_\alpha,X_\beta]=\beta(H_\alpha)X_\beta=\frac{2}{\kappa(T_\alpha,T_\alpha)}\beta(T_\alpha)X_\beta=0$$

となるから $[\mathfrak{h}_1,L_2]=0$ となる．

さらに $\alpha\in\Phi_1$，$\beta\in\Phi_2$ とすれば $\alpha+\beta$ は Φ_2 に属するとすれば $(\alpha+\beta,\alpha)=(\alpha,\alpha)$

$\neq 0$ で矛盾する．同様にして Φ_1 にも属さない，すなわち $\alpha+\beta$ は Φ に属さない．したがって $L_{\alpha+\beta}=0$ すなわち $[L_\alpha, L_\beta]=0$ となる．以上の2つを合わせて $[L_1, L_2]=0$ がでる．したがって $L=L_1 \oplus L_2$ となって L_1, L_2 が共に L のイデアルとなるから L は単純ではない．

逆に L が単純でないとして，I を L の0でも L でもないイデアルとする．§5の定理2によって

$$L=I \oplus J$$

と分解される．明らかに任意のルート α について $S_\alpha \subseteq I$ か $S_\alpha \subseteq J$ が成立する．ここで Φ_i $(i=1,2)$ を次の式で定義する：

$$\Phi_1=\{\alpha \in \Phi \mid S_\alpha \subseteq I\}, \quad \Phi_2=\{\alpha \in \Phi \mid S_\alpha \subseteq J\}$$

明らかに $\Phi=\Phi_1 \cup \Phi_2$ でまた $\alpha \in \Phi_1$，$\beta \in \Phi_2$ とすれば $[S_\alpha, S_\beta]=0$ から $[H_\alpha, X_\beta]=\beta(H_\alpha)X_\beta=0$ すなわち

$$(\alpha, \beta)=\beta(T_\alpha)=\frac{\kappa(T_\alpha, T_\alpha)}{2}\beta(H_\alpha)=0$$

となって $\alpha \perp \beta$ がわかるから $\Phi_1 \perp \Phi_2$ となる．

最後に $\Phi_1 \neq \phi$，$\Phi_2 \neq \phi$ をいえば証明が完了する．もし $\Phi_2=\phi$ とすれば，すべての $S_\alpha \subseteq I$ すなわち $L \subseteq I$ となって矛盾する．■

さて Δ を既約な成分 Δ_1，…，Δ_k に分解したとする．すなわち $\Delta=\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_k$ となっていたとする．このとき定理6の証明から $\Phi_i=\{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in \Delta_i$ で $\sigma \in \mathcal{W}\}$ とすれば $\Phi=\Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_k$ は直和で Φ_i が既約なことがわかる．さらに $\mathcal{E}_i$ を Δ_i で張られた $\mathcal{E}$ の線形部分空間とすれば $\mathcal{E}_1$，…，$\mathcal{E}_k$ は互いに直交して，$\mathcal{E}=\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_k$ で $\Phi_i \subseteq \mathcal{E}_i$ であることがわかる．しかも $\mathcal{E}_i$ は $\mathcal{W}$ について不変である．

定理7の証明と同じように L_1，…，L_k を作れば L_1，…，L_k は L のイデアルであって $L=L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ が成立する．

逆にいま L が任意の半単純複素線形リー代数だったとする．このとき L にはある単純イデアル L_1，…，L_k があって $L=L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ となっている．いま $X \in L$ として $X=X_1+\cdots+X_k$ を $X_i \in L_i$ となるような X の分解とする．このとき X の Jordan 分解を $X=X_d+X_n$，X_i の Jordan 分解を $X_i=X_{id}+X_{in}$ とすれば，明らかに $X_d=X_{1d}+\cdots+X_{kd}$ で $X_n=X_{1n}+\cdots+X_{kn}$ となる．いま $\mathfrak{h}$ を L の Cartan 部分代数として，$\mathfrak{h}_i=\mathfrak{h} \cap L_i$ とすれば $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k$ となる．上にのべた Jordan 分

解の性質から $\mathfrak{h}_i$ は L_i の等羅部分代数になっている．もし L_i の等羅部分代数 $\mathfrak{h}_i'$ で $\mathfrak{h}_i \subsetneqq \mathfrak{h}_i'$ となるものが存在すれば，

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_{i-1} \oplus \mathfrak{h}_i' \oplus \mathfrak{h}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k$$

は $\mathfrak{h}$ より大きい等羅部分代数になることがわかるので，$\mathfrak{h}_i$ は L_i の Cartan 部分代数であることがわかる．

さて $\mathfrak{h}_i$ によってできる L_i のルート系を Φ_i とし，Φ_i によって張られる実ユークリッド空間を $\mathcal{E}_i$ とする．$\alpha \in \Phi_i$ のとき，$j \neq i$ となる $\mathfrak{h}_j$ の上では α は 0 と定義すれば α は L のルートすなわち $\alpha \in \Phi$ となる．そして $L_\alpha \subseteq L_i$ となっている．逆に $\alpha \in \Phi$ とすれば $[\mathfrak{h}, L_\alpha] \neq 0$ からある i があって $[\mathfrak{h}_i, L_\alpha] \neq 0$ となることがわかる．このときは $L_\alpha \subseteq L_i$ となって α を $\mathfrak{h}_i$ に制限したものは Φ_i の元であることがわかる．これから $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_k$ で $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_k$ であることがわかる．すなわち次の系が得られた．

系　$\mathfrak{h}$ は L の Cartan 部分代数，Φ はそのルート系とする．$L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ が L の単純イデアルへの分解とすれば，$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap L_i$ は L_i の Cartan 部分代数であり，L_i の $\mathfrak{h}_i$ によるルート系 Φ_i を Φ の部分集合とみなして $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_k$ が Φ のその既約成分への分割になっているようにできる．

さてここで $\mathfrak{sl}(n, C)$ の場合がどうなっているかを考えることにする．前と同じ記号を用いて λ_1, …, λ_n, $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, $\alpha_i = \alpha_{i\,i+1}$, $\Phi = \{\alpha_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ とする．

計算から明らかに次の式を得る：

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \qquad |i-j| > 1 \text{ のとき}$$

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = -\frac{1}{2n}$$

$$\sigma_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j \qquad |i-j| > 1 \text{ のとき}$$

$$\sigma_{\alpha_i}(\alpha_{i+1}) = \sigma_{\alpha_{i+1}}(\alpha_i) = \alpha_i + \alpha_{i+1}$$

$$\sigma_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$$

一般に $\beta \in \Phi^+$ について，次の式が成立する：

$$\sigma_{\alpha_i}(\beta) = \alpha_i + \beta \qquad \beta \text{ が } \alpha_{i-1} \text{ で終るか } \alpha_{i+1} \text{ で始まるとき}$$

$$\sigma_{\alpha_i}(\beta) = \beta - \alpha_i \qquad \beta \neq \alpha_i \text{ で } \beta \text{ が } \alpha_i \text{ で始まるか，} \alpha_i \text{ で終るとき}$$

$$\sigma_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$$

$\sigma_{\alpha_i}(\beta) = \beta$　　　　以上のいずれでもないとき

以前と同じように $\alpha_{ij} = \Lambda_i - \Lambda_j$, $\alpha_i = \alpha_{i\,i+1}$ と表した上で, Λ_1, …, Λ_n の一次結合に対して σ_i を α_i と α_{i+1} とを入れかえたもの, すなわち次の式で定義する：

$$\sigma_i(a_1\Lambda_1 + \cdots + a_n\Lambda_n) = a_1\Lambda_1 + \cdots + a_{i-1}\Lambda_{i-1} + a_{i+1}\Lambda_i + a_i\Lambda_{i+1} + a_{i+2}\Lambda_{i+2} + \cdots + a_n\Lambda_n$$

明らかに次の式が成立する：

$$\sigma_i(\alpha_j) = \sigma_{\alpha_i}(\alpha_j) \qquad 1 \leq i, j \leq l$$

これから, すべての $\alpha \in \Phi$ に対して

$$\sigma_i(\alpha) = \sigma_{\alpha_i}(\alpha)$$

がでてくる. さて σ_1, …, σ_l は $\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n\}$ を再び $\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n\}$ にかえる置換だと考えれば, この置換群を生成する. この置換群を $\mathcal{S}_n$ と表すことにする. いま σ, τ とが $\mathcal{S}_n$ の相異なった2元とすれば $\alpha \in \Phi$ で $\sigma(\alpha) \neq \tau(\alpha)$ となる α が容易にみつかるから, σ_{α_1}, …, σ_{α_l} で生成された Weyl 群 $\mathcal{W}$ が $\mathcal{S}_n$ と同型であることがわかる.

§8. 複素単純線形リー代数の分類

この節でも L は常に複素半単純線形リー代数とする.

いま Φ を L のルート系とする. いま Φ を Dynkin（ディンキン）図形という図形によって分類することを考える. このために最初に Coxeter（コクセター）図形を考える.

いま $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ を Φ の基本系とする. このとき $\alpha_i \neq \alpha_j$ ならば

$$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = 0, 1, 2, 3$$

であることが前節の補題2の前の注意によってわかる.

いま L の Coxeter 図形を次のようにつくる.

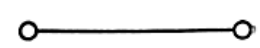
1. それぞれの α_i に対応する1点を作って ○でマークする. この点を α_i の点という.

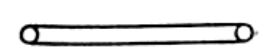
2. もし $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = 0$ ならば, α_i の点と α_j の点は結ばない. すなわち右図の（a）のようになる.

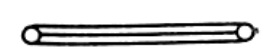
もし $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = 1$ ならば, α_i の点と α_j の点とを1つの線分で結ぶ. すなわち右図の（b）のようになる.

もし $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = 2$ ならば, α_i の点と α_j の点とを2つの線で結ぶ. すなわち右図の（c）のようになる.

(a) 

(b) 

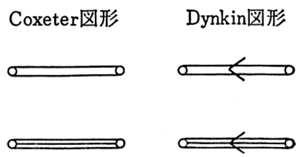
(c) 

(d) 

もし $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = 3$ ならば，α_i の点と α_j の点とを3つの線分で結ぶ．すなわち前ページの図の（d）のようになる．

以上の操作をすべての α_1, …, α_l を表す点の組に行ってできるものが Coxeter 図形といわれるものである．

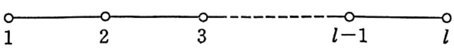
Dynkin 図形というのは Coxeter 図形の，前ページの図でいえば（c）および（d）について，α_i と α_j のベクトルとしての長さを比べて大きい方から小さい方へ図のように < をつけたものである．α_i と α_j の長さの大小は (α_i, α_i) と (α_j, α_j) の大小と同じだから (α_i, α_i) と (α_j, α_j) の長さの大小によって大きい方の点から小さい方の点へと < をつけたものと思ってよい．実際に $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle$ が2か3のときは (α_i, α_i) と (α_j, α_j) が等しくならないことは前節の100ページの表から明らかであろう．



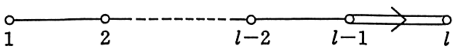
もし $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ で $\Delta_1 \perp \Delta_2$ とすれば $\alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$ について $(\alpha, \beta) = 0$ となるから Δ_1 の元の表す点と Δ_2 の元の表す点とは絶対に結ばれていない．すなわち Δ の Dynkin 図形は Δ_1 の Dynkin 図形と Δ_2 の Dynkin 図形とを2つ離してできたものになっている．すなわち Φ が既約であることは Φ の Dynkin 図形がつながっている（連結である）ことを意味する．したがって複素半単純線形リー代数の Dynkin 図形による分類は複素単純線形リー代数の Dynkin 図形による分類に還元される．

定理 1． L を複素単純線形リー代数，Φ をそのルート系とする．このとき Φ の Dynkin 図形は次の形のいずれかに限る．ここに Φ の基本系 Δ の元の個数を l とする：

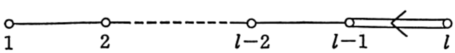
$A_l (l \geq 1)$：



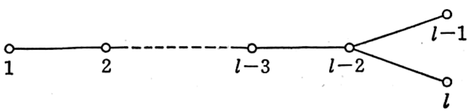
$B_l (l \geq 2)$：



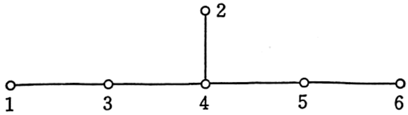
$C_l (l \geq 3)$：



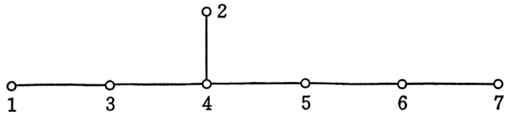
$D_l (l \geq 4)$：



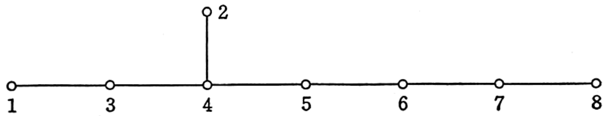
E_6 :



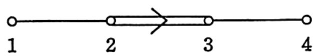
E_7 :



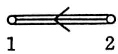
E_8 :



F_6 :



G_2 :



以下にこの定理の証明をしていくことにする.

まず証明するためには Coxeter 図形の分類をして，その結果が上にのべた図形に対応する Coxeter 図形であることをいえば，図から明らかなようにそれに対応するすべての Dynkin 図形が入っているからよい．したがって Coxeter 図形の分類が上の図に対応するものであることをいう.

まず Coxeter 図形には α_i の長さは無関係であるから，α_i の単位ベクトル $\varepsilon_i=\alpha_i/\|\alpha_i\|$ をとって ε_i について議論することにする．まず

$$4(\varepsilon_i,\varepsilon_j)^2=\frac{4(\alpha_i,\alpha_j)(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)}=\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$$

となることに注意すれば，我々の図形 Γ は次の条件をみたしていることがわかる：

（i） Γ は有限個の一次独立な単位ベクトル ε_1, …, ε_l からできている.

（ii） $i\neq j$ ならば $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\leq 0$ である.（前節の補題 2 からでる）

（iii） $4(\varepsilon_i,\varepsilon_j)^2$ は $0,1,2,3$ のいずれかである.

いまこのような Γ が与えられたとき，自動的に ε_i と ε_j とを $4(\varepsilon_i,\varepsilon_j)^2$ 個の線分で結んだ図形を考える．したがって $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l\}$ として与えられた集合と，それからできた図形とを同一視して考える.

以下にこの条件をみたす Γ について考えることにする．Γ はこの条件をみたしていれば連結でなくてもよいことにする．この定理の証明の間は，簡単のためにこの条件をみたしている Γ のことをグラフと呼ぶことにする．

(i) Γ がグラフのとき，Γ の1つの頂点 ε_i を（したがって必然的にそれに結びついた線分を全部）とったものは明らかにまたグラフになっている．

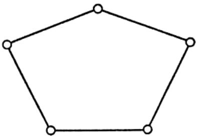
(ii) 少なくとも1つの線分で結びつけられる頂点の組 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ の数は Γ の頂点の個数 l より少ない．

［証明］ $\varepsilon=\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i$ とおく．ε_1, …, ε_l は一次独立であるから $\varepsilon\neq 0$ となる．したがって

$$0<(\varepsilon,\varepsilon)=l+2\sum_{i<j}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$$

さて $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\neq 0$ であったとする． このとき $4(\varepsilon_i,\varepsilon_j)^2=1,2,3$ であるから $2(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\leq -1$ となる．上の式からこのような（$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\neq 0$ となる）$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)(i<j)$ は高々 $l-1$ 個しかあり得ない．

(iii) グラフ Γ にはサイクル（図のような回路）は存在しない．



［証明］ Γ のなかにサイクル Γ' があれば，その Γ' 以外の点は (i) を何度か適用してとってしまえば Γ' 自身がグラフになっている．この Γ' に (ii) を適用すれば矛盾がでる．

(iv) グラフ Γ の1点に結びつけられた線分の個数は 1,2,3 のいずれかである．

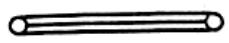
［証明］ ε を Γ の点として，ε に線分で結びつけられている頂点を η_1, …, η_k とする．ε と η_i との間は1個か2個か3個の線分で結びつけられている．すなわち $(\varepsilon,\eta_i)<0$ となる．Γ にはサイクルはないから $(\eta_i,\eta_j)=0$ $(i\neq j)$ となっている．ε,η_1, …, η_k は一次独立であるから ε,η_1, …, η_k の一次結合で表される単位ベクトル η_0 ですべての η_1, …, η_k と直交しているものがある．明らかに $(\varepsilon,\eta_0)\neq 0$ となる．ε は η_0,η_1, …, η_k の一次結合になるから

$$\varepsilon=\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon,\eta_i)\eta_i$$

が成立する．したがって次の式が成立する：

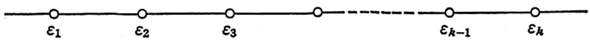
$$1=(\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon,\eta_i)^2$$

これから $\sum_{i=1}^{k}(\varepsilon,\eta_i)^2<1$ すなわち $\sum_{i=1}^{k}4(\varepsilon,\eta_i)^2<4$ となる． ところで $4(\varepsilon,\eta_i)^2$ が ε と η_i とを結ぶ線分の個数であるから証明が終った．

(v) 連結したグラフで  を内部に含むグラフはそれ自身だけである.

［証明］ (iv) より明らか.

(vi) グラフ Γ の部分に次の形があったとする.



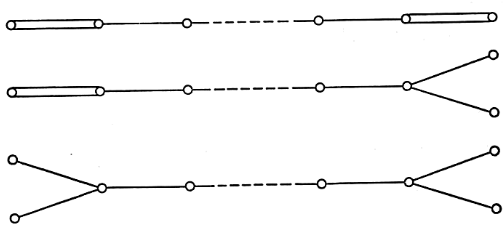
ここで $\varepsilon_i(2 \leq i \leq k-1)$ は 1 つの線分で ε_{i-1} と ε_{i+1} と に結びつけられているとする. このとき Γ から $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ をとり去り, その代りに $\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$ をつけたものはやはりグラフになっている.

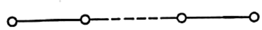
［証明］ 仮定により $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1 \ (1 \leq i \leq k-1)$, したがって

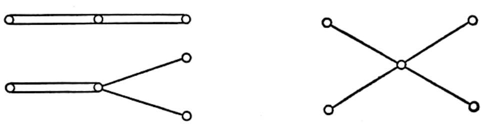
$$(\varepsilon, \varepsilon) = k + 2 \sum_{i<j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = k - (k-1) = 1$$

したがって ε は単位ベクトルである. Γ の $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ 以外の点 η は $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ のなかの高々 1 つの点としか線分で結びつけられていない（サイクルがないから）. したがって $(\eta, \varepsilon) = 0$ か $(\eta, \varepsilon) = (\eta, \varepsilon_i) \ (1 \leq i \leq k)$ のいずれかが成立する. いずれにしても $4(\eta, \varepsilon)^2 = 0, 1, 2, 3$ のいずれかになる.

(vii) グラフ Γ は次の形をその一部分に含まない.

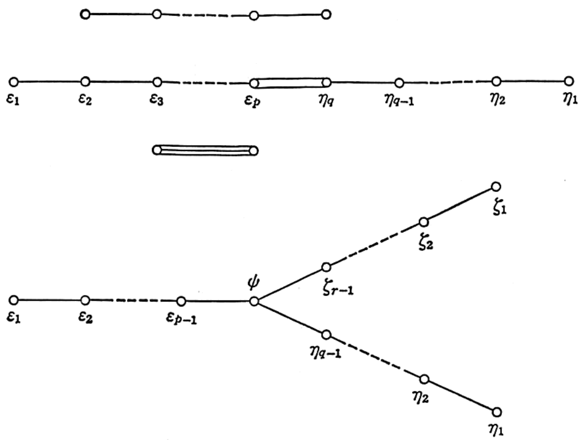


［証明］ この形を含んだとすると, 真中の  の部分を (vi) によって 1 点にすると

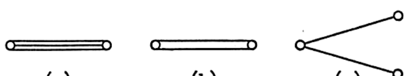


の形がでてくることになり (iv) に矛盾する.

(viii) グラフ Γ が連結ならば, Γ は次の形のどれかになる.

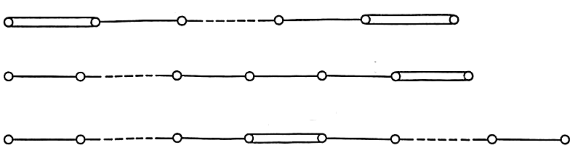


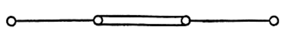
［証明］ 3つの線分が2点の間を結ぶのは図（a）のものしかないことは（v）から明らか．もし図（b）の形を1つ以上含むとすれば図（d）の形が必ず入っている．これは（vii）に反する．また同じ理由で図（b）のものをもてば図（c）の形はありえない．したがって図（b）のものをもってあり得るのは図（e），（f）の2つの形しかない．



(a)　(b)　(c)

(d)　(e)　(f)



(ix) 上の図（f）の形であり得るのは  だけである．

［証明］ 一般の形で前にかいた記号 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p, \eta_q, \eta_{q-1}, \cdots, \eta_1$ を用いることにする．$\varepsilon=\sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i,\ \eta=\sum_{i=1}^{q} i\eta_i$ とおく．仮定により $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})=2(\eta_i, \eta_{i+1})=-1$ であり，あとは0となる．したがって次の式が成立する：

$$(\varepsilon, \varepsilon)=\sum_{i=1}^{p} i^2-\sum_{i=1}^{p-1} i(i+1)=\frac{p(p+1)}{2}$$

$$(\eta, \eta) = \frac{q(q+1)}{2}$$

一方 $4(\varepsilon_p, \eta_q)^2 = 2$ であるから次の式が成立する：

$$(\varepsilon, \eta)^2 = p^2q^2(\varepsilon_p, \eta_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}$$

ε と η とは一次独立だから次の Schwarz の式で不等号が成立する：

$$(\varepsilon, \eta)^2 < (\varepsilon, \varepsilon)(\eta, \eta) \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4}$$

これから $(p-1)(q-1)^2 < 2$ がでる．この可能性があるのは $p = q = 2$, $p = 1$, $q = 1$ しかない，すなわち証明された．

(x) 最後に (viii) の最後の図の可能性は D_l, E_6, E_7, E_8 だけであることをいう．(viii) の最後の図の ε_1, …, ε_{p-1}, ψ, ζ_1, …, ζ_{r-1}, η_1, …, η_{q-1} を用いる．

$\varepsilon = \sum i\varepsilon_i$, $\eta = \sum i\eta_i$, $\zeta = \sum i\zeta_i$ とおく．明らかに ε, η, ζ, ψ は一次独立である．いま $\varepsilon_0 = \varepsilon/\|\varepsilon\|$, $\eta_0 = \eta/\|\eta\|$, $\zeta_0 = \zeta/\|\zeta\|$ として ψ_0 を $\psi, \varepsilon, \eta, \zeta$ で張られる空間の単位ベクトルで ε, η, ζ に対して直交するものとすれば，$(\psi, \psi_0) \neq 0$ となる．(iv) でのべたように

$$1 = (\psi, \psi_0)^2 + (\psi, \varepsilon_0)^2 + (\psi, \eta_0)^2 + (\psi, \zeta_0)^2$$

となるから

$$(\psi, \varepsilon_0)^2 + (\psi, \eta_0)^2 + (\psi, \zeta_0)^2 < 1$$

となる．一方 (ix) の計算から $(\varepsilon, \varepsilon) = p(p-1)/2$ となり

$$(\psi, \varepsilon_0)^2 = \frac{(\psi, \varepsilon)^2}{(\varepsilon, \varepsilon)} = \frac{(p-1)^2(\varepsilon_{p-1}, \psi)^2}{(\varepsilon, \varepsilon)} = \frac{2(p-1)^2}{4p(p-1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

同様にして次の式を得る：

$$(\psi, \eta_0)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right), \qquad (\psi, \zeta_0)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

これから計算すれば次の式が得られる：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

一般性を失うことなしに $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r}$ となる．さらに p, q, r のうち少なくとも 1 つが 1 ならば，これは A_l の場合になるから $2 \leq r$ すなわち $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$ となる．したがって $\frac{3}{2} \geq \frac{3}{r} > 1$ となるから $3 > r \geq 2$ となり $r = 2$ がわかる．これから次の式がでる：

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

これから $1\geq\frac{2}{q}>\frac{1}{2}$, これから $4>q\geq 2$ となる. したがって $q=2$ または $q=3$ となる.

$r=2,\ q=2$ の場合が D_l の場合である.

$r=2$ で $q=3$ とすれば $\frac{1}{p}>\frac{1}{6}$ から $6>p$ となり $q=3,4,5$ にしたがって E_6, E_7, E_8 のグラフになる.

いま $\Delta=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l)$ をルート系 Φ の基本系とするとき, 次の形の行列を Φ の Cartan 行列という $(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)$.

たとえば $\mathfrak{sl}(n,C)$ の場合, 前と同じく $\Phi=\{\alpha_{ij}\}$, $\Delta=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l\}$ とすれば, 次の形が Cartan 行列になっている:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \text{\Large 0} & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

これから $\mathfrak{sl}(n,C)$ の Dynkin 図形がちょうど A_l になることは明らかであろう. もちろん $l=n-1$ である.

さて Cartan 行列はルート系をただ一通りに定めることを証明しよう. その前に L, L' が2つの複素半単純線形リー代数で $\Phi,\ \Phi'$ がそのルート系とするとき $\varphi:\Phi\to\Phi'$ がルート系としての同型写像であるということを Φ,Φ' の作る実ユークリッド空間を $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ とするとき, φ が $\varphi:\mathcal{E}\to\mathcal{E}'$ なる線形同型写像に拡大されて $\langle\varphi(\alpha),\varphi(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$ がすべての $\alpha,\beta\in\Phi$ に対して成立することと定義する.

このとき Φ の Cartan 行列と Φ' の Cartan 行列が等しいということは, Φ の基本系 $\Delta=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l\}$ に対して対応する Φ' の基本系 $\Delta'=\{\alpha_1',\ \cdots,\ \alpha_l'\}$ があって $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\langle\alpha_i',\alpha_j'\rangle$ となっているということである. このとき Δ は $\mathcal{E}$ を Δ' は $\mathcal{E}'$ を生成するから, この Δ と Δ' との対応は $\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}'$ への線形写像 φ に一意的に拡大される.

さて $\alpha,\beta\in\Delta$ とすれば

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta))&=\sigma_{\alpha'}(\beta')=\beta'-\langle\beta',\alpha'\rangle\alpha'=\varphi(\beta)-\langle\beta,\alpha\rangle\varphi(\alpha)\\&=\varphi(\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha)=\varphi(\sigma_\alpha(\beta))\end{aligned}$$

となる．すなわち次の図式は可換になる：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathcal{E}' \\ {\scriptstyle \sigma_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{\varphi(\alpha)}} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathcal{E}' \end{array}$$

ところで $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ はそれぞれ $\sigma_\alpha(\alpha \in \varDelta)$，$\sigma_{\alpha'}(\alpha' \in \varDelta')$ によって生成されるから，σ に対して $\varphi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}$ を対応させる対応は $\mathcal{W}$ から $\mathcal{W}'$ の上への同型写像になっている．ところで任意の $\beta \in \varPhi$ は必ず $\sigma(\alpha)$ $(\alpha \in \varDelta, \sigma \in \mathcal{W})$ の形にかける．$\beta = \sigma(\alpha)$ とすれば次の式が成立する：

$$\varphi(\beta) = \varphi(\sigma(\alpha)) = (\varphi\circ\sigma\circ\varphi^{-1})(\varphi(\alpha)) \in \varPhi'$$

このことは φ が $\varPhi$ を $\varPhi'$ の上に対応させることを意味している．

あとで複素半単純線形リー代数 L, L' については $\varPhi$ と $\varPhi'$ とが同型ならば L と L' とがリー代数として同型になることが証明される．

次にいま $\varPhi$ の Dynkin 図形が与えられたとき，それから Cartan 行列が計算できることをいう．

Dynkin 図形の点を $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ と名前をつけて，$\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle = 2$ となるから，$i \neq j$ のときに $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle$ が Dynkin 図形から求まることをいえばよい．

もし α_i と α_j とが線分で結ばれていなければ $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = 0$ となるからよい．

もし α_i と α_j とがただ1つの線分で結ばれていれば $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = 1$ で $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle$ は負の整数であるから $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = \langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = -1$ がでる．

次に α_i, α_j が k $(k = 2, 3)$ の線分で結ばれているとすれば $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = k$ だから，$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle$ と $\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle$ の一方が $-k$ で他方が -1 でなければならない．ところで

$$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \qquad \langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

となるから $\|\alpha_i\| > \|\alpha_j\|$ ならば $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = -k$ で $\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = -1$ となり，$\|\alpha_i\| < \|\alpha_j\|$ ならば $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = -1$ で $\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = -k$ となることがわかる．

以上によって Dynkin 図形から Cartan 行列が得られることがわかる．

いままで我々が議論してきたところだけでは，同じ複素単純線形リー代数が全く異なった2つのルート系 $\varPhi$ と $\varPhi'$ とをもつ可能性がある．しかしこれは $\varPhi$ の生成する実ユークリッド空間 $\mathcal{E}$ の次元をそれぞれ $\operatorname{rank}\varPhi$ と表すと

$$\dim L = \operatorname{rank}\Phi + (\Phi \text{ の個数})$$

が $\dim \mathfrak{h} = \operatorname{rank}\Phi$, $\dim(\sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha) = (\Phi$ の個数) から容易に証明され，この式から B_l と C_l を除いてはそのようなことがあり得ないことがわかる．ところで上にのべたすべてのタイプ $A_l(l \geq 1)$, $B_l(l \geq 2)$, $C_l(l \geq 3,)$, $D_l(l \geq 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 はすべて複素単純線形リー代数の Dynkin 図形として実現することができる．しかもルート系が同型ならば，もとのリー代数も同型なことがいえる上に，B_l と C_l を実現する実際のリー代数が同型でないことがいえるので A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 の分類は複素単純線形リー代数の分類として完全なものであることがわかる．

さて２つの複素単純線形リー代数の Dynkin 図形が等しいとすれば，そのルート系 Φ と Φ' が同型になるのであるが，それは定義によって，Φ と Φ' の生成する実ユークリッド空間 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ について φ: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ なる線形同型写像で Φ を Φ' の上に移し，すべての $\alpha, \beta \in \Phi$ について

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\varphi(\alpha), \ \varphi(\beta)\rangle$$

となるものが存在することである．

いま $\langle\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle'$, $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \beta)'$ とおくことにする．このとき $\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle'$ であるから

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\beta, \alpha)'}{(\alpha, \alpha)'} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \alpha)'} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)'}$$

これから

$$\frac{(\beta, \beta)}{(\beta, \beta)'} = \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \alpha)'} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)'}$$

となるから $(\alpha, \alpha)' = c(\alpha, \alpha)$ と正の実数 c を１つの α によって定めれば $(\beta, \beta)' = (\beta, \beta)$ がすべての β に対して成立し，したがって $(\alpha, \beta)' = c(\alpha, \beta)$ となることがわかる．内積のスカラー倍は実ユークリッド空間の性質をかえないから初めから次の条件が成立しているものとして差支えない：

$$(\alpha, \beta) = (\varphi(\alpha), \ \varphi(\beta))$$

さて Dynkin 図形が複素単純線形リー代数を特徴づけることを証明するために，まず次の補題を証明する．

補題 1. L は複素半単純線形リー代数，$\mathfrak{h}$ はその Cartan 部分代数，Φ はルート系，

Δ はその基本系とする．このとき L はリー代数として L_α, $L_{-\alpha}(\alpha\in\Delta)$ の全体によって生成される．したがって $X_\alpha\in L_\alpha$, $Y_\alpha\in L_{-\alpha}$ なる0でない X_α, Y_α を任意にとれば X_α, $Y_\alpha(\alpha\in\Delta)$ の全体によって生成される．

［証明］ $\beta\in\Phi^+$ とする．前節の補題6によって $\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ $(\alpha_i\in\Delta)$ であって，その部分和 $\alpha_1+\cdots+\alpha_i$ がすべてルートであるようにできる．さらに $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_1+\gamma_2\in\Phi$ のときには $[L_{\gamma_1},L_{\gamma_2}]=L_{\gamma_1+\gamma_2}$ となるから，k についての帰納法で L_β が $\bigcup_{\alpha\in\Delta}L_\alpha$ から生成された L の部分リー代数のなかに入っていることがわかる．しかし $L=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$ で $\mathfrak{h}=\sum_{\alpha\in\Phi}[L_\alpha,L_{-\alpha}]$ であるから証明が完了した．■

さて $0\neq X_\alpha\in L_\alpha$ と $0\neq Y_\alpha\in L_{-\alpha}$ を $[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$ となるようにとる．ここで $H_\alpha=2T_\alpha/\kappa(T_\alpha,T_\alpha)$ であるから $\alpha(H_\alpha)=2\alpha(T_\alpha)/\kappa(T_\alpha,T_\alpha)=2$ となるから H_α は $[L_\alpha,L_{-\alpha}]$ の $\alpha(H_\alpha)=2$ となる元である．

この $\{X_\alpha,Y_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ または $\{X_\alpha,Y_\alpha,H_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ を L の標準生成元と呼ぶことにする．

いま $(L,\mathfrak{h})$, $(L',\mathfrak{h}')$ は共に複素単純線形リー代数とその Cartan 部分代数の組として，Φ,Φ' はそれぞれその既約ルート系で $\varphi:\Phi\to\Phi'$ はその同型写像とする．すなわち $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ をそれぞれ Φ,Φ' から生成される実ユークリッド空間とすれば，φ は線形写像 $\varphi:\mathcal{E}\to\mathcal{E}'$ に拡大されて $\alpha,\beta\in\Phi$ について $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\varphi(\alpha),\ \varphi(\beta)\rangle$ が成立しているものとする．前に注意したように φ は内積をかえないとしてよい．すなわち一般に $\gamma_1,\gamma_2\in\mathcal{E}$ に対して次の式が成立するものとしてよい：

$$(\gamma_1,\gamma_2)=(\varphi(\gamma_1),\ \varphi(\gamma_2))$$

さて Φ, Φ' はそれぞれ $\mathfrak{h}^*$($\mathfrak{h}$ の汎関数の全体), $\mathfrak{h}'^*$ を生成するから φ は次の線形写像に拡大できる：

$$\phi:\quad \mathfrak{h}^*\longrightarrow\mathfrak{h}'^*$$

いま $\pi(T_\alpha)=T_{\varphi(\alpha)}$ $(T_{\varphi(\alpha)}\in\mathfrak{h}')$ と定義すれば

$$\pi:\quad \mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{h}'$$

なる線形写像が定義できる． $H_\alpha=\dfrac{2T_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ であるから

$$\pi(H_\alpha)=\frac{2T_{\varphi(\alpha)}}{(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))}=H_{\varphi(\alpha)}\qquad H_{\varphi(\alpha)}\in\mathfrak{h}'$$

が成立する．

いま以上の対応で α に対応する $\varphi(\alpha)$ を α', H に対応する $\pi(H)$ を H' とおけば，

次の式が成立する：

$$\alpha(H) = \alpha'(H')$$

すなわち α と α' とは π によって $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ とを同一視すれば全く同じ関数になっている.

これをみるために $H=\sum c_\beta H_\beta$ とすれば $H'=\sum c_\beta H_{\beta'}$ であるから，次の式から明らかである：

$$\alpha(H_\beta) = \frac{2\alpha(T_\beta)}{(\beta,\beta)} = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = \frac{2(\alpha',\beta')}{(\beta',\beta')} = \alpha'(H_{\beta'})$$

この状況で次の定理が成立する.

定理 2. 上の状況において，Φ の基本系 Δ を固定する．$\Delta'=\{\varphi(\alpha)\,|\,\alpha\in\Delta\}$ と定義すれば Δ' は Φ' の基本系となる．今後 $\varphi(\alpha)$ を α' とかくことにする．このとき 0 でない $X_\alpha\in L_\alpha$, $X_{\alpha'}\in L'_{\alpha'}$ を任意に選んで $\pi_\alpha: L_\alpha\to L'_{\alpha'}$ を $\pi_\alpha(X_\alpha)=X_{\alpha'}$ によって定義する．このとき同型写像 $\pi: L\to L'$ で $\pi:\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}'$ と π_α の拡大になっているようなものがただ 1 通り存在する.

［証 明］ Φ は既約であるから前節の補題 8 によって $\leq$ に関する最大元 β をもつ Δ' は Δ の像として作っているから，β に対応する β' は Φ' の最大元になっている．いま 0 でない $X\in L_\beta$, $X'\in L'_{\beta'}$ を任意にとって $\bar{X}=(X,X')\in L\oplus L'$ と定義する.

さらにすべての $\alpha\in\Delta$ について，0 でない $X_\alpha\in L_\alpha$, $Y_\alpha\in L_{-\alpha}$ を $H_\alpha=[X_\alpha, Y_\alpha]$ となるように選ぶ．同様に 0 でない $X_{\alpha'}\in L_{\alpha'}$, $Y_{\alpha'}\in L_{-\alpha'}$ を $H_{\alpha'}=[X_{\alpha'}, Y_{\alpha'}]$ となるように選ぶ．$\bar{X}_\alpha=(X_\alpha, X_{\alpha'})$, $\bar{Y}_\alpha=(Y_\alpha, Y_{\alpha'})$, $\bar{H}_\alpha=(H_\alpha, H_{\alpha'})$ と定義する.

いま M を $L\oplus L'$ の線形部分空間で，すべての

(＊)　$(\mathrm{ad}\,\bar{Y}_{\alpha_1}\,\mathrm{ad}\,\bar{Y}_{\alpha_2}\cdots\mathrm{ad}\,\bar{Y}_{\alpha_m})\bar{X}$　　$\alpha_1, \cdots, \alpha_m\in\Delta$（重複はあってもよい）

によって生成されるものとする．もちろん ＊ で表される元は $L_{\beta-\Sigma\alpha_i}\oplus L_{\beta'-\Sigma\alpha_i'}$ に属する．したがって $M\cap(L_\beta\oplus L'_{\beta'})$ に一次元であるから，M は $L\oplus L'$ の真部分線形空間になっている.

いま D を $\bar{X}_\alpha$, $\bar{Y}_\alpha$, $\bar{H}_\alpha$ $(\alpha\in\Delta)$ の全体によって生成される $L\oplus L'$ の部分リー代数とする．いま D の任意の元 $\bar{Z}$ に関して M は $\mathrm{ad}\,\bar{Z}$ に関して閉じていることを証明しよう．D は $\bar{X}_\alpha$, $\bar{Y}_\alpha$, $\bar{H}_\alpha$ で生成されるから，M が $\mathrm{ad}\,\bar{Y}_\alpha$, $\mathrm{ad}\,\bar{H}_\alpha$, $\mathrm{ad}\,\bar{X}_\alpha$ で閉じていることをいえばよい.

まず M の定義から M が $\mathrm{ad}\,\bar{Y}_\alpha$ で閉じていることは明らかである.

次に $[\bar{H}, \bar{Y}_\alpha] = -\alpha(H)\bar{Y}_\alpha$ となるから $\mathrm{ad}\,\bar{H}$ と $\mathrm{ad}\,\bar{Y}_\alpha$ との順序をかえるのには M の元を加えるだけでなされ，最後に $[\bar{H}, \bar{X}] = \alpha(H)\bar{X}$ となるから $\mathrm{ad}\,\bar{H}$ が M を不変にすることも明らかである．

最後に α が単純ルートとすれば $\mathrm{ad}\,\bar{X}_\alpha$ は $\mathrm{ad}\,\bar{Y}_\gamma\,(\gamma \in \Delta)$ と $\gamma = \alpha$ 以外のときは可換になるから問題はない．また $[\bar{X}_\alpha, \bar{Y}_\alpha] = \bar{H}_\alpha$ であるから $\mathrm{ad}\,\bar{Y}_\alpha$ と交換するには $\mathrm{ad}\,\bar{H}_\alpha$ の項をつけ加えればよいし，それについては既に解決ずみである．最後に $[\bar{X}, \bar{X}] = 0$ となるから M が $\mathrm{ad}\,\bar{X}_\alpha$ で閉じていることがわかった．

これから D が $L \oplus L'$ の真部分リー代数であることがわかる．これはもしそうでなければ M が $L \oplus L'$ のイデアルとなり，§4 の定理 2 により $L \oplus L'$ の $L \oplus L'$ でも 0 でもないイデアルは L と L' しかないが，M がいずれでもないことは明らかである．

さて D の元を $\bar{Z} = (Z, Z')$ とするとき $\bar{Z}$ に対して Z または Z' を対応させる写像を考えれば明らかにこれは $D \to L$ なる写像と $D \to L'$ なる写像になっている．作り方から明らかに，これはリー代数としての準同型になっている．また作り方からこの準同型はそれぞれ L の上への準同型と L' の上への準同型になっている．いまこの準同型が 1 対 1 すなわち同型写像であることを証明する．いまたとえば $D \to L'$ の準同型が 1 対 1 でなかったとする．このことは D と $L \oplus 0$ とに 0 以外の共通部分があることを意味する．しかもそれは準同型の核であるから $I \oplus 0$ の形で I は L のイデアルである．L は単純であるから，$L = I$ となる．したがって D は $L \oplus 0$ を含む．これから D が $0 \oplus L'$ を含むことは明らかである．したがって $D = L \oplus L'$ となり矛盾する．

この D によって $L \to L'$ となる同型写像が得られ，単純ルートの α に対しては X_α を $X_{\alpha'}$ に H_α を $H_{\alpha'}$ に対応するので定理が証明された．∎

§9. 複素半単純線形リー代数のウェイト

この節でも L は複素半単純線形リー代数とする．いま $\mathfrak{h}$ を L の Cartan 部分代数，(ρ, V) を L の無限次元かもしれない表現とする．さらに λ を $\mathfrak{h}$ の上の複素線形汎関数とするとき $V_{\lambda,\rho}$ を次の式によって定義する：

$$V_{\lambda,\rho} = \{v \in V \mid \text{すべての } H \in \mathfrak{h} \text{ について } \rho(H)v = \lambda(H)v\}$$

いま $V_{\lambda,\rho} \neq 0$ のとき λ を表現 ρ のウェイト (weight) という．

明らかにルートは (ad, L) という L の表現のウェイトである．したがってルートはウェイトの特別な場合になっている．

定理 1.　$\mathfrak{h}$ を L の Cartan 部分代数，(ρ, V) を L の無限次元かもしれない表現，λ を ρ のウェイト，α を L のルートとすれば，L_α の任意の元 X に対して次の式が成立する：

$$\rho(X)V_{\lambda,\rho} \subseteq V_{\lambda+\alpha,\rho}$$

［証明］　$X \in L_\alpha$ とすれば，

$$[H, X] = \alpha(H)X$$

であるから

$$[\rho(H), \rho(X)] = \rho([H, X]) = \rho(\alpha(H)X) = \alpha(H)\rho(X)$$

したがって $v \in V_{\lambda,\rho}$ とすれば

$$\rho(H)\rho(X)v = \rho(X)\rho(H)v + \alpha(H)\rho(X)v = (\lambda(H) + \alpha(H))\rho(X)v$$

となって証明された．■

定理 2.　(ρ, V) を L の表現，λ を ρ のウェイト，$\alpha \in \Phi$ とすると次の性質が成立する：

（i）　$\lambda + m\alpha$ が ρ のウェイトとなるような最大の m を p，最小の m を $-q$ とするとき，$-q \leq m \leq p$ をみたすすべての m について $\lambda + m\alpha$ は ρ のウェイトになっており，次の式が成立する：

$$q - p = \langle \lambda, \alpha \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

(ii)　$\lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha$ は ρ のウェイトである．

(iii)　$\lambda + \alpha$ が ρ のウェイトで，X を L_α の 0 でない元とすれば

$$\rho(X)V_{\lambda,\rho} \neq 0$$

［証明］（i）　$X = X_\alpha \in L_\alpha$，$Y_\alpha \in L_{-\alpha}$，$[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ となるように Y_α をとる．X_α，Y_α，H_α で生成される複素線形空間は $\mathfrak{sl}(2, C)$ と同型であり，ρ をこの上に制限したものを ρ' とすれば (ρ', V) は $\mathfrak{sl}(2, C)$ の表現になっている．

さて $\lambda + (p+1)\alpha$ は ρ のウェイトでないから定理 1 によって $\rho(X)V_{\lambda+p\alpha,\rho} = 0$ となる．したがって $V_{\lambda+p\alpha,\rho}$ の 0 でないベクトルの 1 つを v とすれば，v は (ρ', V) の原始ベクトルになっている．したがって §4 の定理 4 およびその系によって上の v を §4 定理 4 の v,

$$\mu = \lambda(X) + 2p \qquad (\alpha(H_\alpha) = 2 \text{ である})$$

とすれば μ は負でない整数であり，$0 \leq k \leq \mu$ をみたすすべての整数 k に対して $v_k \neq 0$

であり，

$$\rho(Y_\alpha)^k v = k! v_k \neq 0$$

から再び定理1を用いて $V_{\lambda+p\alpha-k\alpha,\rho} \neq 0$ すなわち $\lambda + p\alpha - k\alpha$ は再びウェイトになる．これから

$$p - k \geq -q$$

がでてくる．ここで $k = \mu$ とおけば

$$q - p \geq \lambda(H_\alpha)$$

が得られた．いま同じことを $-\alpha$ について行えば

$$p - q \geq \lambda(H_{-\alpha}) = -\lambda(H_\alpha)$$

となるから全体として

$$q - p = \lambda(H_\alpha) = \langle \lambda, \alpha \rangle$$

が得られた．さて $\lambda(H_\alpha) = q - p$ であるから $\mu = p + q$，したがって $0 \leq k \leq p + q$ なる k に対して $V_{\lambda+(p-k)\alpha,\rho} \neq 0$ すなわち $-q \leq m \leq p$ なるすべての整数 m について $\lambda + m\alpha$ がウェイトになることがわかった．

(ii) $-\langle \lambda, \alpha \rangle = p - q$ は整数でさらに $-q \leq p - q \leq p$ だからよい．

(iii) いま $V_{\lambda+p\alpha,\rho}$ から 0 でないベクトルを1つとって v とすれば，§4 定理4とその系によって $\lambda(H_\alpha) + 2p = p + q$ であるから

$$v_k \neq 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, p + q)$$

$$\rho(X) v_k = (\mu - k + 1) v_{k-1} = (p + q - k + 1) v_{k-1}$$

これから $v_{p-1} \neq 0$，$v_p \neq 0$ で $\rho(X) v_p = (q + 1) v_{p-1}$ であり再び定理1から $v_p \in V_{\lambda,\rho}$ であるからこれは $\rho(X) V_{\lambda,\rho} \neq 0$ を意味する．■

この定理での $\lambda - q\alpha, \lambda - (q-1)\alpha, \cdots, \lambda, \cdots, \lambda + p\alpha$ のことを λ を含むウェイトの α-系列という．

系 1. $\alpha \in \Phi$ で λ をウェイトとするとき，$\langle \lambda, \alpha \rangle$ は整数である．したがって (λ, α) は有理数となる．

系 2. λ をウェイトとすれば，λ は有理数を係数とする Δ の元の一次結合で表される．

［証明］ Δ は $\mathfrak{h}$ の上のすべての複素線形汎関数を張るから $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ とすれば $c_1, \cdots, c_l \in \boldsymbol{C}$ で

$$\lambda = c_1\alpha_1 + \cdots + c_l\alpha_l$$

となる．いま c_1，…，c_l が有理数であることをいえばよい．ところで

$$(\lambda, \alpha_i) = c_1(\alpha_1, \alpha_i) + \cdots + c_l(\alpha_l, \alpha_i)$$

で (α_i, α_i)，(λ, α_i) が有理数であり，α_1，…，α_l が一次独立で $(\ ,\ )$ がその内積であるから $\det[(\alpha_i, \alpha_k)] \neq 0$ がわかるから c_1，…，c_l が有理数であることは明らかである．■

さて $\mathcal{E}$ を §7 で定義された Δ の元で張られたユークリッド空間とする．(ρ, V) を V の表現，λ をそのウェイトとすれば，系1により λ は $\langle\lambda, \alpha\rangle \in \boldsymbol{Z}$ という性質をもっている．あとで証明されるように $\mathcal{E}$ の元 λ がすべての $\alpha \in \Phi$ について $\langle\lambda, \alpha\rangle \in \boldsymbol{Z}$ という性質をもてば，ある有限次元の表現のウェイトになっている．

したがってどの表現と固定しないで，この性質をもっているもの一般についてまず調べることにする．すなわち次の定義をする．

Λ を次の式で定義する：

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathcal{E} \mid \text{すべての } \alpha \in \Phi \text{ について } \langle\lambda, \alpha\rangle \in \boldsymbol{Z}\}$$

Λ の元を整ウェイトと呼ぶことにする．

$$\Lambda^+ = \{\lambda \in \mathcal{E} \mid \text{すべての } \alpha \in \Delta \text{ について，} \langle\lambda, \alpha\rangle \text{ は負でない整数である．}\}$$

とおいて Λ^+ の元を支配的な整ウェイトという．

さらに $\lambda \in \Lambda^+$ がすべての $\alpha \in \Delta$ について $\langle\lambda, \alpha\rangle > 0$ となれば，λ を狭義に支配的という．

λ が支配的ならば $\lambda \geq 0$ となるが逆は成立しない．

いま $\lambda \in \Lambda$ とすれば，$\alpha_i \in \Delta$ について $\langle\lambda, \alpha_i\rangle$ は整数になる．逆に一般の Φ の元は α_1，…，α_l の整係数の一次結合で表されるから，すべての α_1，…，α_l について $\langle\lambda, \alpha_i\rangle$ が整数になれば λ は整ウェイトである．さらに λ を $\mathfrak{h}$ の上の任意の複素線形汎関数として，すべての α_i について $\langle\lambda, \alpha_i\rangle$ が整数になれば，λ は $\mathcal{E}$ の元と考えてよい．したがってこの場合 λ は整ウェイトと考えてよい．

いま λ を L のある表現 (ρ, V) のウェイトであるとすれば，前にいったように λ は整ウェイトになっている．あとで支配的な整ウェイトは常にある既約表現の最高ウェイトになっていることを証明する．

次の形の $\lambda \in \mathcal{E}$ の全体を Λ_r と定義する：

$$\lambda = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l \qquad n_1, \cdots, n_l \in \mathbf{Z}$$

もちろん $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ とする．$\Lambda_r \subseteq \Lambda$ であって Λ_r が Λ の部分加群になっていることは明らかであろう．

いま Cartan 行列を $M = (a_{ij})$ とする．すなわち $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ となる．M は逆行列をもつから $M^{-1} = (b_{ij})$ とする．いま

$$M\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_l\end{pmatrix} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_l\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_l\end{pmatrix}$$

によって $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ を定義すれば，

$$\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \langle \sum_k b_{ik}\alpha_k, \alpha_j \rangle = \sum_k b_{ik}\langle \alpha_k, \alpha_j \rangle = \sum_k b_{ik}a_{kj} = \delta_{ij}$$

となる．すなわち $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ はすべて整ウェイトであり，すべての整ウェイトは $m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ と $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ の整数を係数とする一次結合で表される．この $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ を基本的な整ウェイトという．

いま $\alpha_i = \sum_j m_{ij}\lambda_j$ とおけば $m_{ij} \in \mathbf{Z}$ となり，$\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ から $m_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ がわかる．すなわち Λ/Λ_r の位数は $\det M$ となることがわかる．ここに M は Cartan 行列である．したがって Λ/Λ_r はもちろん有限である．

$L = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の場合には $\det M = n = l + 1$ となり計算すれば $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の基本的整ウェイトが次のものであることがわかる：

$$\lambda_i = \frac{1}{n}((n-i)\alpha_1 + 2(n-i)\alpha_2 + \cdots + (i-1)(n-i)\alpha_{i-1}$$
$$+ i(n-i)\alpha_i + i(l-i)\alpha_{i+1} + \cdots + i\alpha_l)$$

前と同じ様に $\bar{\mathcal{C}}$ を Weyl の閉領域とする．このとき次の補題が成立する．

補題 1． $\lambda \in \mathcal{E}$ とすれば，$\mathcal{W}$ の元 σ があって $\sigma\lambda \in \bar{\mathcal{C}}$ となる．

［証明］ いま $\mathcal{E}$ の半順序 $\leq$ に関して $\sigma\lambda$ が極大になるような $\mathcal{W}$ の元を σ とする．もし $\sigma\lambda \notin \bar{\mathcal{C}}$ とすれば

$$\lambda = c_1\alpha_1 + \cdots + c_i\alpha_i - c_{i+1}\alpha_{i+1} \pm c_{i+2}\alpha_{i+2} \pm \cdots \pm c_l\alpha_l \qquad c_1, \cdots, c_l \geq 0, \ c_{i+1} > 0$$

となるような i が存在する．もし α_{i+2} の係数が $+c_{i+2}$ とすれば

$$\sigma_{\alpha_{i+1}}\lambda = c_1\alpha_1 + \cdots + c_i\alpha_i + (c_i + c_{i+1} + c_{i+2})\alpha_{i+1} \pm c_{i+2}\alpha_{i+2} \pm \cdots$$

となって $\lambda < \sigma_{\alpha_{i+1}}\lambda$ であるから λ の極大性に反する．したがって α_{i+2} の係数は $-c_{i+2}$

となる.

このとき $\sigma_{\alpha_{i+1}}\lambda$ と λ を比べれば

$$c_i + 2c_{i+1} \leq c_{i+2}$$

がでてくる. 次に α_{i+3} の係数が $+c_{i+3}$ であれば $\sigma_{\alpha_{i+2}}\lambda$ と λ とを比べれば λ の極大性に矛盾するから α_{i+3} の係数は $-c_{i+3}$ で, そこで $\sigma_{\alpha_{i+2}}\lambda$ と λ との係数を比べれば

$$2c_{i+2} \leq c_{i+1} + c_{i+3} \qquad \text{これから} \qquad c_{i+2} \leq c_{i+3}$$

これを繰り返せば λ は次の形であることがわかる:

$$\lambda = c_1\alpha_1 + \cdots + c_i\alpha_i - c_{i+1}\alpha_{i+1} - c_{i+2}\alpha_{i+2} - \cdots - c_l\alpha_l$$

$$c_{i+1} \leq c_{i+2} \leq c_{i+3} \leq \cdots \leq c_l$$

ここで $\sigma_l\lambda$ と λ とを比べれば $c_l = 0$ がでて矛盾が生じた. ■

定理 3. λ を整ウェイトとする. このとき $\sigma\lambda$ が支配的なウェイトであるような $\sigma \in \mathcal{W}$ がただ 1 通り存在する. もし λ が支配的とする. このときすべての $\sigma \in \mathcal{W}$ に対して $\sigma\lambda \leq \lambda$ となる. もし λ が狭義に支配的ならば $\sigma\lambda = \lambda$ となるのは $\sigma = 1$ のときに限る.

[証明] $\mathcal{W}$ の元は $\mathcal{E}$ の内積をかえないから, Λ を不変に保つ. いま σ を $\sigma\lambda \in \bar{C}$ となる σ とすれば $\sigma\lambda$ は支配的なウェイトである. この $\sigma\lambda$ がただ1通りであることは §7 補題7より明らかである.

もし λ が支配的であって, $\sigma\lambda \lneqq \lambda$ とすれば $\sigma\lambda$ より大きい $\sigma'\lambda$ のなかの $\leq$ についての極大を再び $\sigma\lambda$ とすれば, $\sigma\lambda \lneqq \lambda$ で補題1の証明により $\sigma\lambda$ は再び支配的となる. したがって $\sigma\lambda = \lambda$ となって矛盾する.

もし λ を狭義に支配的とすれば

$$\lambda = \langle\lambda, \alpha_1\rangle\lambda_1 + \cdots + \langle\lambda, \alpha_l\rangle\lambda_l$$

で $\langle\lambda, \alpha_1\rangle, \cdots, \langle\lambda, \alpha_l\rangle > 0$ となる. このとき $\sigma\lambda = \lambda$ とすれば, σ は λ をかえない $\sigma_\alpha (\alpha \in \Delta)$ の積となっている.

いま $\sigma_{\alpha_i}\lambda = \lambda - \langle\lambda, \alpha_i\rangle\alpha_i$ であるからこれは $\langle\lambda, \alpha_i\rangle > 0$ に矛盾する. ■

補題 2. $\lambda \in \Lambda^+$ とする. このとき $\mu \leq \lambda$ となる支配的な一般ウェイト μ の数は有限である.

[証明] $\lambda + \mu \in \Lambda^+$ であって $\lambda - \mu$ が正のルートの正係数の一次結合で表されるから

$$0 \leq (\lambda + \mu, \lambda - \mu) = (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu)$$

したがって μ は次の有界集合に入っている：

$$\{\xi \in \mathcal{E} \mid (\xi, \xi) \leq (\lambda, \lambda)\}$$

この有界集合と Λ^+ の共通部分が有限であることは明らかであろう．■

前に定義したように $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ で $\sigma_{\alpha_i} \delta = \delta - \alpha_i \ (1 \leq i \leq l)$ である．次に $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ を基本的整ウェイトとして δ を $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ で表すことにする．

補題 3.　次の等式が成立する．したがって δ は狭義に支配的な整ウェイトである：

$$\delta = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$$

［証 明］　σ_{α_i} を σ_i とかくことにする．このとき

$$(\delta - \alpha_i, \alpha_i) = (\sigma_i \delta, \alpha_i) = (\sigma_i^2 \delta, \sigma_i \alpha_i) = (\delta, -\alpha_i)$$

これから直ちに $2(\delta, \alpha_i) = (\alpha_i, \alpha_i)$ すなわち $\langle \delta, \alpha_i \rangle = 1$ がでる．これから $\delta = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ は明らか．■

補題 4.　$\mu \in \Lambda^+$, $\sigma \in \mathcal{W}$, $\nu = \sigma^{-1} \mu$ とする．このとき次の不等式が成立し，等号が成立するのは $\nu = \mu$ のときに限る：

$$(\nu + \delta, \nu + \delta) \leq (\mu + \delta, \mu + \delta)$$

［証 明］　明らかに

$$\begin{aligned}(\nu + \delta, \nu + \delta) &= (\sigma(\nu + \delta), \sigma(\nu + \delta)) \\ &= (\mu, \mu) + 2(\mu, \sigma\delta) + (\sigma\delta, \sigma\delta) \\ &= (\mu + \delta, \mu + \delta) - 2(\mu, \delta - \sigma\delta)\end{aligned}$$

定理 3 と補題 3 により $\delta - \sigma\delta$ は正のルートの正係数の一次結合で表されるから，$\mu \in \Lambda^+$ を用いて

$$(\nu + \delta, \nu + \delta) \leq (\mu + \delta, \mu + \delta)$$

が得られた．等号が成立するのは $(\mu, \delta - \sigma\delta) = 0$ のとき，すなわち $(\mu, \delta) = (\mu, \sigma\delta) = (\nu, \delta)$ のときであるが，これは $(\mu - \nu, \delta) = 0$ を意味し，$\mu - \nu$ は再び定理 3 により正のルートの正係数の一次結合で表され，δ は狭義に支配的であるから $\mu = \nu$ となる．■

3 複素半単純線形リー代数の表現

この章では複素半単純線形リー代数の表現について考えるが，まず色々の準備から始めることにする．

§10. 一般多項式

いま x と y とを変数とする．このとき x と y との一般単項式を次の形であると定義する：

$$cx^{p_1}y^{q_1}x^{p_2}y^{q_2}\cdots x^{p_n}y^{q_n}$$

ここに $c\in C$ で，$p_1, q_1, \cdots, p_n, q_n$ は負でない整数であって $q_1, p_2, q_2, \cdots, p_n$ は正，しかし p_1, q_n は 0 であってもよいものとする．もちろん x^0 は実際には1であるからとり去ってしまう．ここで p_1 と q_n に0をいれたのは，x から始まる場合，y から始まる場合，x で終る場合，y で終る場合と4通りをかくのが面倒だからという理由だけである．したがって上の特別な場合（$n=1$ で $p_1=q_1=0$）として c だけの場合も一般単項式と考えることにする．

$p_1+q_1+\cdots+p_n+q_n$ をこの一般単項式の次数という．

ここで一般単項式と‘一般’をつけた理由は明らかなことと思うが，説明すれば普通は $xy=yx$ と x と y との可換性を仮定するので，上の式は

$$cx^{p_1+\cdots+p_n}y^{q_1+\cdots+q_n}$$

とかけばよいことになる．ここでは x と y との可換性を仮定しないので，上のような複雑な形が一般の形になるのである．

次に x と y との一般多項式を有限個の一般単項式の和と定義する．ここで一般多項式の和や積は常識通りに行うものとする．たとえば

$$(xyx^2+3yx^3)(yxy^2+2xy^2)$$
$$=xyx^2yxy^2+3yx^3yxy^2+2xyx^3y^2+6yx^4y^2$$

となる．もちろん加法の順序はかえてもよいものとする．

x と y との一般多項式の全体はもちろん複素線形空間になっているが，いままでの議論と少しちがうところは，この線形空間は有限次元でなくて無限次元になっていることである．

いま上では x と y と変数を 2 つだけに限ったが一般に n 個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ があったときに $x_1, \cdots, x_n$ の一般多項式を同様に定義することができる．

さて L を複素半単純線形リー代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数，Φ をルート系，Δ をその基本系，Φ^+ を正のルートの全体とする．いま $\mathfrak{h}$ の次元を l とすれば，$\mathfrak{h}$ の基底を $H_1, \cdots, H_l$ を $H_i=H_{\alpha i}$ としてとり，$\alpha\in\Phi^+$ に対して $X_\alpha\in L_\alpha, Y_\alpha\in L_{-\alpha}$ をそれぞれ 0 でない元で $[X_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha$ となるようにとれば，$X_\alpha, Y_\alpha\ (\alpha\in\Phi^+), H_1, \cdots, H_l$ が L の複素線形空間としての基底になっている．

いまこの $H_1, \cdots, H_l, X_\alpha\ (\alpha\in\Phi^+)$，$Y_\alpha(\alpha\in\Phi^+)$ に対応する変数 $h_1, \cdots, h_l$, $x_\alpha(\alpha\in\Phi^+)$, $y_\alpha(\alpha\in\Phi^+)$ を導入して，この変数からできる一般多項式の全体を $\tilde{U}$ で表すことにする．

さて L の任意の元 X を

$$\sum_i a_iH_i+\sum_{\alpha\in\Phi^+}b_\alpha X_\alpha+\sum_{\alpha\in\Phi^+}c_\alpha Y_\alpha$$

と表して，$x\in\tilde{U}$ を次の式で定義する：

$$x=\sum_i a_ih_i+\sum_{\alpha\in\Phi^+}b_\alpha x_\alpha+\sum_{\alpha\in\Phi^+}c_\alpha y_\alpha$$

このとき x を X に対応する $\tilde{U}$ の元という．

さて $L\subseteq M(n, C)$ として $\tilde{U}$ から $M(n, C)$ への写像 $\tilde{\pi}$ を次のように定義する．

（i） $X\in L$ で x を X に対応する $\tilde{U}$ の元とするとき

$$\tilde{\pi}(x)=X$$

（ii） $x=u_1\cdots u_k$ の形で u_j は h_i, x_α, y_α のどれかの形とする．このとき $\tilde{\pi}(x)$ は次の式で定義する：

$$\tilde{\pi}(x)=\tilde{\pi}(u_1)\cdots\tilde{\pi}(u_k)$$

ここでもちろんこの右辺の積は $M(n, C)$ での積である．

(iii)　　$\tilde{\pi}(1)=E$　　（単位行列）

このあと $\tilde{\pi}$ を線形によって $\tilde{U}$ 全体に拡大する．

このとき $\tilde{\pi}:\tilde{\mathfrak{U}} \longrightarrow M(n,C)$ が準同型，すなわち次の条件をみたすことは明らかであろう：

$$\alpha,\beta \in C,\ u,v \in \tilde{\mathfrak{U}} \implies \tilde{\pi}(\alpha u+\beta v)=\alpha\tilde{\pi}(u)+\beta\tilde{\pi}(v)$$
$$u,v \in \tilde{\mathfrak{U}} \implies \tilde{\pi}(uv)=\tilde{\pi}(u)\tilde{\pi}(v)$$

これはもともと $L \subseteq M(n,C)$ であることからくるのである．

いま $X \in L$ として X に対応する $\tilde{\mathfrak{U}}$ の元を x とすれば次の式が成立する：

$$\tilde{\pi}(x)=X$$

次に $\tilde{\mathfrak{U}}$ に [,] を次の式で導入する：

$$[u,v]=uv-vu$$

この上で $\tilde{\mathfrak{U}}$ に次の新しい演算の規則を導入する：

いま x と y とを $\tilde{\mathfrak{U}}$ の変数（すなわち h_i, x_α, y_α のどれかになっている）とするとき，それに対応する L の元を X, Y とする．このとき

$$[X,Y]=\sum_i a_i H_i+\sum_\alpha b_\alpha X_\alpha+\sum_\alpha c_\alpha Y_\alpha$$

とかけたとする．このとき次の演算規則を導入する：

$$[x,y]=\sum_i a_i h_i+\sum_\alpha b_\alpha x_\alpha+\sum_\alpha c_\alpha y_\alpha$$

この演算規則の導入によって $\tilde{\mathfrak{U}}$ からできたものを $\mathfrak{U}$ とかいて L の包絡代数という．正確には $\mathfrak{U}(L)$ とかくが多くの場合に L を省略する．さてこの新しい演算規則ということに抵抗を感じる人もいるかもしれないが，これは実は我々はいつもやり慣れていることである．すなわち普通に我々が x と y との多項式に代数的な演算を入れるときは実は一般多項式を考えて，そこに $xy=yx$ という新しい演算規則を入れて考えているのであって，上のことはその一般化にほかならない．

さて $X, Y \in L$ として X, Y に対応する $\tilde{\mathfrak{U}}$ の元を x, y とすれば明らかに次の式が成立する：

$$\tilde{\pi}([x,y])=[\tilde{\pi}(x),\tilde{\pi}(y)]$$

したがって，$X, Y, Z \in L$ でそれに対応する $\tilde{\mathfrak{U}}$の元 x, y, z に関して $\mathfrak{U}$ の新しい演算規則

$$[x,y]=z$$

が導入されたとすれば，実はもともと

$$[\tilde{\pi}(x),\tilde{\pi}(y)]=\tilde{\pi}(z)$$

が $M(n,C)$ では成立している．したがって $\tilde{\pi}:\tilde{\mathfrak{U}} \longrightarrow M(n,C)$ の $\tilde{\pi}$ はやはり $\mathfrak{U}$ の上

でも準同型になっている．この同じ $\tilde{\pi}$ を $\mathcal{U}$ の上の準同型として考えたものを π とかくことにする．すなわち $\pi:\mathcal{U}\longrightarrow M(n,C)$ は準同型であって，$X\in L$ で x を X に対応する $\mathcal{U}$ の元とするとき

$$\pi(x)=X$$

が成立している．

さて $i:L\longrightarrow\mathcal{U}$ を次のように定義する：

$$i(X)=x \qquad \text{ここに } x \text{ は } X \text{ に対応する } \mathcal{U} \text{ の元}$$

この定義によって i がリー代数としての準同型になっていることは，$\mathcal{U}$ に $[\ ,\ ]$ についての必要なルールがすべて入っていることから明らかであろう．さらに

$$L\xrightarrow{\ i\ }\mathcal{U}\xrightarrow{\ \pi\ }M(n,C)$$

とすれば $\pi\circ i$ は L の元を自分自身に移すことは明らかである．したがって i が同型写像になっていることは明らかである．

さらに $\mathcal{U}$ の元は i の像と 1 とから生成されることは明らかであるから，次の定理を得る．

定理 1． $i:L\longrightarrow\mathcal{U}$ はリー代数としての同型写像であって，$\mathcal{U}$ は i の像と 1 から生成される．

さて次に L の基底 $H_1,\cdots,H_l,X_\alpha(\alpha\in\Phi^+),Y_\alpha(\alpha\in\Phi^+)$ をある順序で並べてこれを $U_1,\cdots,U_k$ とする．この順序はどんな順序でもよいが一度きめたらあとは固定して考えることにする．

いま単項式

$$U_{i_1}\cdot U_{i_2}\cdot\cdots\cdot U_{i_m}$$

が標準的であるということを $j<k$ のときに $i_j\leq i_k$ のこととする．

このとき任意の $\mathcal{U}$ の元は標準的な単項式と 1 との一次結合で表されていることは次の操作によって容易にわかる．

いま U_{i_k} と $U_{i_{k+1}}$ で $i_{k+1}<i_k$ とすれば

$$\begin{aligned}U_{i_1}\cdots U_{i_m}=&\,U_{i_1}\cdots U_{i_{k-1}}U_{i_{k+1}}U_{i_k}\cdots U_{i_m}\\&+U_{i_1}\cdots U_{i_{k-1}}[U_{i_k},U_{i_{k+1}}]U_{i_{k+2}}\cdots U_{i_n}\end{aligned}$$

となる，ここで第 1 項は $i_j<i_k$ $(k<j)$ となっているような k の数が減っているし，第 2 項は項の長さが減っている．したがって有限個の操作のうちにすべての項が標準的な単項式の一次結合になることは明らかである．

いま1と標準的な単項式の全体が $\mathcal{U}$ の基底になっていることを証明しよう．

このためには上にのべたことから1と標準的な単項式の全体が一次独立になっていることをいえばよい．

いま1と標準的な単項式の一次結合で表されるものの全体を $\mathcal{P}$ とする．$\mathcal{P}$ では余計な演算や余計な演算規則を導入しないから，もちろん1と標準的な単項式の全体が基底となっている複素線形空間である．

いま $\sigma: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{P}$ という複素線形写像を次の条件をみたすように定義する：

(i) $$\sigma(1)=1, \qquad \sigma(U_{i_1}\cdots U_{i_m}) = U_{i_1}\cdots U_{i_m}$$

　ここに $U_{i_1}\cdots U_{i_m}$ は標準的な単項式とする．

(ii) $$\sigma(U_{i_1}\cdots U_{i_m} - U_{i_1}\cdots U_{i_{k+1}}U_{i_k}U_{i_{k+2}}\cdots U_{i_m})$$
$$= \sigma(U_{i_1}\cdots U_{i_{k-1}}[U_{i_k}, U_{i_{k+1}}]U_{i_{k+2}}\cdots U_{i_m})$$

このような σ が定義できることは $U_{i_1}\cdots U_{i_m}$ の長さが短いものから順々に定義していく，また同じ長さの単項式についてはその中に現われる i_k のなかで一番大きいものを i としたときに i が小さいものから順々に定義をしていくものとする．

この σ の構成をやっていくには実際には単項式に入っている $u_{i_k}u_{i_{k+1}}$ で $i_{k+1} < i_k$ であるものを $u_{i_{k+1}}u_{i_k} + [u_{i_k}, u_{i_{k+1}}]$ にかえるのであるが，(ii) が成立するように σ が定義できるということは，この変形を単項式に入っているどの $u_{i_k}u_{i_{k+1}}$ からどの順番でいっても結局は同じ $\mathcal{P}$ の元が得られることを証明することになる．

これはとどのつまりは UVW と並んでいるときの変形が順番によらないことに帰着される．これは次の元が σ で0になることをいえばよい．

$$(\cdots U[VW]\cdots) - (\cdots[VW]U\cdots)$$
$$-(\cdots V[UW]\cdots) + (\cdots[UW]V\cdots)$$
$$+(\cdots W[UV]\cdots) - (\cdots[UV]W\cdots)$$

ここで … は単項式の他の部分を表す．

これはさらに σ が次の元を0に移すことをいえばよい．

$$(\cdots[U[VW]]\cdots) + (\cdots[V[WU]]\cdots) + (\cdots[W[UV]]\cdots)$$

しかしこれは $[U[VW]] + [V[WU]] + [W[UV]] = 0$ から明らかである．

さて σ で $\tilde{\mathcal{U}}$ の元で $\mathcal{U}$ の元としては0になるものがすべて0となることは明らかであるから，σ は $\mathcal{U}$ から $\mathcal{P}$ への複素線形写像として定義されていて上の(i)の条件をみたすものとなっている．すなわち次の Poincaré (ポアンカレ)–Birkhoff (バーコフ)–Witt

(ヴィット) の定理が得られた.

定理 2.　1および標準的単項式が $\mathcal{U}$ の基底になっている. ▯

この定理は通常 PBW 定理とかかれている. この定理から次の系は直ちに得られる. この系の前半は定理1で既に証明されている.

系　$i: L \longrightarrow \mathcal{U}$ はリー代数としての同型写像であって, i の像と定数の全体 $\boldsymbol{C}$ とは互いに素である.

いま一般に複素線形空間に積が定義されていて, 次の条件をみたすとき代数ということにする.

$$(aX+bY)Z = aXZ+bYZ \qquad a,b \in \boldsymbol{C}$$
$$X(aY+bZ) = aXY+bXZ \qquad a,b \in \boldsymbol{C}$$
$$(XY)Z = X(YZ)$$

いま $\mathcal{A}$ が代数であるとき, $\mathcal{A}$ に交換子積 [,] を $[X,Y]=XY-YX$ によって定義してできるリー代数を $\mathcal{A}_L$ とかくことにする.

いまの場合 $i: L \longrightarrow \mathcal{U}$ によって L を $\mathcal{U}_L$ の部分リー代数とみなすことができる.

このとき $\mathcal{U}$ は次の2つの条件をみたしている:

(i)　L は $\mathcal{U}_L$ の部分リー代数である.

(ii)　L の基底にある順序をつけて $U_1, \cdots, U_k$ とするとき, 1と標準的単項式の全体が $\mathcal{U}$ の基底になっている.

逆に任意の代数 $\mathcal{A}$ がこの2つの条件をみたすとする. すなわち

(i)　L は $\mathcal{A}_L$ の部分リー代数である.

(ii)　L の基底に, ある順序をつけて $U_1, \cdots, U_k$ とするとき, 1と標準的単項式の全体が $\mathcal{A}$ の基底になっている.

このとき明らかに $\mathcal{U}$ から $\mathcal{A}$ への線形空間としての同型写像を, 1と標準的単項式の全体を自分自身に移すものとして定義すれば (i) の条件により, これは $\mathcal{U}_L$ から $\mathcal{A}_L$ へのリー代数としての同型写像になっており, また代数としての同型写像になっていることも明らかである. したがって $\mathcal{A}$ は $\mathcal{U}$ の代数とリー代数との両方について同型であることがわかる. すなわち上の (i) と (ii) とは包絡代数を特徴づける性質であることがわかる.

いま $X=\{x_1, \cdots, x_N\}$ を N 個の文字の集合とする. このとき X の文字から作られる

一般多項式の全体を再び $\tilde{\mathcal{U}}$ とかくことにする．このとき $\mathcal{L} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$ で次の条件をみたす最小のものを $x_1, \cdots, x_N$ から生成された自由リー代数と呼ぶ：

(i) $X \subseteq \mathcal{L}$ すなわち $x_1, \cdots, x_N \in \mathcal{L}$

(ii) $u_1, u_2 \in \mathcal{L} \Longrightarrow [u_1, u_2] \in \mathcal{L}$

(iii) $\mathcal{L}$ は複素線形空間である．すなわち

$$u_1, u_2 \in \mathcal{L}, \quad a, b \in C \Longrightarrow au_1 + bu_2 \in \mathcal{L}$$

以下にこの自由リー代数を $\mathcal{L}$ でかくことにする． さていま $\mathcal{L}$ の包絡代数を考えることにする． これはいままでとちがうのは $\mathcal{L}$ は無限次元のリー代数になっていることだけである．したがって全く同じ手続きで構成する．すなわちまず $\mathcal{L}$ の基底をとってそれを文字と考えてその一般多項式の全体を考えて $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$ とする．ここで $\mathcal{L}$ で $[u_1, u_2] = u_3$ が成立していればこれを新しい計算のルール $u_1u_2 - u_2u_1 = u_3$ として導入する．ところで $\mathcal{L}$ で成立するルールはもともとの一般多項式 $\tilde{\mathcal{U}}$ において $[u_1, u_2] = u_1u_2 - u_2u_1$ によって表されるルールだけであるから $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$ にこのルールを入れて作った $\mathcal{L}$ の包絡代数 $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ は $\tilde{\mathcal{U}}$ と同型であることがわかる．すなわち $\tilde{\mathcal{U}}$ が $\mathcal{L}$ の包絡代数になっている．

$\mathcal{L}$ の元を $\tilde{\mathcal{U}}$ のリー要素という．次に $\tilde{\mathcal{U}}$ の元がリー要素である必要十分条件を求めることにする．

このために $\tilde{\mathcal{U}} \otimes \tilde{\mathcal{U}}$ を考える．すなわち $\tilde{\mathcal{U}}$ の基底を選んで $u_1, u_2, \cdots$とするとき，$\tilde{\mathcal{U}} \otimes \tilde{\mathcal{U}}$ の基底は $u_i \otimes u_j$ であってさらに次の条件がみたされているものとする：

$$(au_1 + bu_2) \otimes u_3 = au_1 \otimes u_3 + bu_2 \otimes u_3$$

$$u_1 \otimes (au_2 + bu_3) = au_1 \otimes u_2 + bu_1 \otimes u_3$$

$$(u_1 \otimes u_2) \cdot (u_3 \otimes u_4) = (u_1 \cdot u_3) \otimes (u_2 \cdot u_4)$$

いま $\delta : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}} \otimes \tilde{\mathcal{U}}$ を次の条件によって一意的に定まる準同型とする（準同型の意味は積に対しても $\delta(uv) = \delta(u)\delta(v)$ をみたす）：

$$\delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$$

$$\delta(1) = 1 \otimes 1$$

このとき次の定理が成立する．

定理 3. $\tilde{\mathcal{U}}$ の元 u がリー要素である必要十分条件は $\delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ が成立することである．

［証明］ 明らかに $x_1, \cdots, x_n$ に対しては $\delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ が成立する．さらに

$\delta(u)=u\otimes1+1\otimes u,\ \delta(v)=v\otimes1+1\otimes v$ が成立するとすれば

$$\begin{aligned}\delta([u,v])&=\delta(u)\delta(v)-\delta(v)\delta(u)\\&=uv\otimes1+v\otimes u+u\otimes v+1\otimes uv\\&\quad-vu\otimes1-v\otimes u-u\otimes v-1\otimes vu\\&=[u,v]\otimes1+1\otimes[u,v]\end{aligned}$$

となるから $[u,v]$ も条件をみたす．すなわちすべてのリー要素 u は $\delta(u)=u\otimes1+1\otimes u$ をみたす．

さてリー要素の全体 $\mathcal{L}$ の基底を適当に並べて $y_1,y_2,\cdots$ とする．この順序を固定して考える．このとき $\tilde{\mathfrak{U}}$ は $\mathcal{L}$ の包絡代数であるから PBW の定理により $y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_m^{k_m}$($k_i\geq0$ で $y_i^0=1$ とする）の全体が $\tilde{\mathfrak{U}}$ の基底になっている．したがって

$$(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_m^{k_m})\otimes(y_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_n^{l_n})$$

が $\tilde{\mathfrak{U}}\otimes\tilde{\mathfrak{U}}$ の基底になっている．ところで

$$\begin{aligned}\delta(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_m^{k_m})&=(y_1\otimes1+1\otimes y_1)^{k_1}(y_2\otimes1+1\otimes y_2)^{k_2}\cdots(y_m\otimes1+1\otimes y_m)^{k_m}\\&=y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_m^{k_m}\otimes1+k_1y_1^{k_1-1}y_2^{k_2}\cdots y_m^{k_m}\otimes y_1+k_2y_1^{k_1}y_2^{k_2-1}\cdots y_m^{k_m}\otimes y_2\\&\quad+\cdots+k_my_1^{k_1}\cdots y_m^{k_m-1}\otimes y_m+R\end{aligned}$$

ここで R は $y_1^{j_1}\,y_2^{j_2}\cdots y_s^{j_s}\otimes y_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_t^{l_t}$ で $\sum l_i>1$ となる項を全部集めたものとする．いま $\delta(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n})$ が $y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_m^{k_m}\otimes1+1\otimes y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_m^{k_m}$ であるためには，$k_1,\cdots,k_m$ のうちただ一つだけが 1 であとはすべて 0 であることが必要である．すなわち y_i の形でなければならない．ところで y_i はリー要素であるからリー要素でなければならない．▩

§11. Hausdorff の公式

前節の方法を用いて第1章で約束した Hausdorff の公式を証明することにする．

まず文字 $x_1,\cdots,x_n$ の一般多項式をさらに一般にして一般形式的無限級数を考えることにする．すなわち一般単項式の複素数を係数とする形式的な無限和を考えるのである．以下この本では単に一般級数と呼ぶ．もちろん一般級数にも普通のように和と積を定義する：

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}v_i\right)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}w_i\right)$$

として，ここに u_i, v_i, w_i はそれぞれ次数が i の単項式の和とすれば

$$w_i = u_0 v_i + u_1 v_{i-1} + \cdots + u_i v_0$$

となっている．

この一般級数によって $\exp u$, $\log(1+u)$ を次の式で定義する：

$$\exp u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots$$

形式的な級数であるから次の式は容易に計算される：

$$\exp(\log(1+u)) = 1 + u, \qquad \log(\exp u) = u$$

以下に一般級数の全体を $\mathscr{F}$ で表すことにする．

前節と同じように $\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}$ を考える．もちろんこの場合は基底の無限和も入っているものとする．この上で

$$\delta:\quad \mathscr{F}_1 \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}$$

を前と同じく $\delta(1) = 1 \otimes 1$, $\delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ をみたす準同型と定義する．この場合準同型の意味は

$$\delta(\sum_i a_i) = \sum_i \delta(a_i)$$

をみたすものとする．このとき $\mathscr{F}$ のなかのリー要素の全体 $\bar{\mathscr{L}}$ を

(i)　$x_1, \cdots, x_i \in \bar{\mathscr{L}}$

(ii)　$u, v \in \bar{\mathscr{L}} \Longrightarrow [u, v] \in \bar{\mathscr{L}}$

(iii)　$u_i \in \bar{\mathscr{L}} \Longrightarrow \sum_i u_i \in \bar{\mathscr{L}}$

をみたす最小の $\mathscr{F}$ の複素線形部分空間と定義する．

前節の定理3と同じ証明で $\mathscr{F}$ の元 u がリー要素である必要十分条件は $\delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ であることがわかる．

さて $N=2$ の場合を考えて x_1, x_2 の代りに x, y とかくことにする．このとき次の定理が成立する．

定理 1.　$\log(\exp x \exp y)$ はリー要素である．

［証明］　$\delta(\exp x \exp y)$ を考えれば

$$\delta(\exp x \exp y) = \exp(\delta x)\exp(\delta y)$$

$$= \exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x)\exp(y \otimes 1 + 1 \otimes y)$$
$$= \exp(x \otimes 1)\exp(1 \otimes x)\exp(y \otimes 1)\exp(1 \otimes y)$$

(ここに u, v が可換のとき $\exp(u+v) = \exp u \exp v$ であることと，$x \otimes 1$ と $1 \otimes x$ が可換のことを用いた)

$$= ((\exp x) \otimes 1)(1 \otimes (\exp x))((\exp y) \otimes 1)(1 \otimes (\exp y))$$
$$= ((\exp x) \otimes 1)((\exp y) \otimes 1)(1 \otimes (\exp x))(1 \otimes (\exp y))$$
$$= ((\exp x \exp y) \otimes 1)(1 \otimes (\exp x \exp y))$$

したがって $1 + z = \exp x \exp y$ とおけば

$$\delta(1+z) = ((1+z) \otimes 1)(1 \otimes (1+z))$$

したがって次の式が成立する：

$$\begin{aligned}\delta(\log(1+z)) &= \log \delta(1+z)\\ &= \log((1+z) \otimes 1)(1 \otimes (1+z))\\ &= \log((1+z) \otimes 1) + \log(1 \otimes (1+z))\\ &= (\log(1+z)) \otimes 1 + 1 \otimes \log(1+z)\end{aligned}$$

したがって $\log(1+z)$ がリー要素であることがわかった．■

さて $\log(\exp x \exp y)$ の具体的な形を求めることにする．前と同じく $x = x_1$，$y = x_2$ とする．

いま u がリー要素として $\delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ とすれば u のなかの次数が i の一般単項式の全体を v とすれば，v もやはり $\delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ をみたすことは明らかだから v もやはりリー要素になる．したがって具体的なものを求める議論においては一般級数の議論から再び一般多項式の議論，すなわち有限和の場合に戻って考えればよい．

したがって前節の $\tilde{\mathfrak{U}}$ と $\mathcal{L}$ とに戻ることにする．いま $\tilde{\mathfrak{U}}'$ を $\tilde{\mathfrak{U}}$ の定数項のない元とする．このとき $\sigma : \tilde{\mathfrak{U}}' \longrightarrow \mathcal{L}$ という複素線形写像を次のように一般単項式に対して定義して線形によって一般に定義する：

$$\sigma x_i = x_i$$
$$\begin{aligned}\sigma(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}) &= [x_{i_1}, [x_{i_2}, \cdots, [x_{i_{n-1}}, x_{i_n}]\cdots]]\\ &= \mathrm{ad}(x_{i_1})\cdots\mathrm{ad}(x_{i_{n-1}})(x_{i_n})\end{aligned}$$

いま $\mathcal{L}$ の上での ad を考えればこれは $\mathrm{ad} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{L})$ となっている．$\tilde{\mathfrak{U}}$ は $\mathcal{L}$ の包絡代数であるから，この ad は $\tilde{\mathfrak{U}}$ から $\mathrm{End}(\mathcal{L})$ への準同型 θ に一意的に拡大する

ことができる．すなわち

$$\theta:\quad \tilde{U} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{L}) \qquad \theta \text{ は } \mathcal{L} \text{ の上では ad}$$

補題1. $u\in\tilde{U},\ v\in\tilde{U}'$ ならば次の式が成立する：

$$\sigma(uv)=\theta(u)\sigma(v)$$

［証明］ σ も θ も線形だから $u=x_{i_1}\cdots x_{i_n}$ の場合に証明すればよい．n についての帰納法で証明する．

$n=1$ の場合は明らかだから $n>1$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\sigma(x_{i_1}\cdots x_{i_n}v)&=\theta(x_{i_1})\sigma(x_{i_2}\cdots x_{i_n}v)\\&=\theta(x_{i_1})\theta(x_{i_2}\cdots x_{i_n})\sigma(v)\\&=\theta(x_{i_1}\cdots x_{i_n})\sigma(v)\end{aligned}$$

となって証明が完了した．■

定理2. u を $\mathcal{L}$ の次数 n の元とすれば次の式が成立する：

$$\sigma(u)=nu$$

［証明］ n についての帰納法で証明する．$n=1$ のときは明らかである．したがって $n>1$ とする．このとき $u=\sum[v_i,w_i]$ であるから $u=[v,w]$ で $v,w\in\mathcal{L}$ で v の次数が p，w の次数が q，$p,q>0$ で $p+q=n$ としてよい．

このとき $\theta(v)=\mathrm{ad}\,v$，$\theta(w)=\mathrm{ad}\,w$ であるから次の式が成立して証明が完了する：

$$\begin{aligned}\sigma([v,w])&=\sigma(vw-wv)=\theta(v)\sigma(w)-\theta(w)\sigma(v)\\&=q\theta(v)w-p\theta(w)v\\&=q[v,w]-p[w,v]\\&=(q+p)[v,w]=nu\qquad ■\end{aligned}$$

さていよいよ $\log(\exp x\exp y)$ の具体的な形を求めることにしよう．

$$\begin{aligned}\exp x\exp y&=\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{y^q}{q!}\right)\\&=1+\sum_{p+q\geq 1}\frac{x^py^q}{p!q!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(\exp x\exp y)&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\left(\sum_{p+q\geq 1}\frac{x^py^q}{p!q!}\right)^m\\&=\sum_{p_i+q_i\geq 1}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\frac{x^{p_1}y^{q_1}x^{p_2}y^{q_2}\cdots x^{p_m}y^{q_m}}{p_1!q_1!\cdots p_m!q_m!}\end{aligned}$$

さて $x^{p_1}y^{q_1}x^{p_2}y^{q_2}\cdots x^{p_m}y^{q_m}$ に σ を施せば $q_m\geq 1$ のときは

$$\sigma(x^{p_1}y^{q_1}\cdots x^{p_m}y^{q_m}) = \mathrm{ad}(x)^{p_1}\mathrm{ad}(y)^{q_1}\cdots\mathrm{ad}(x)^{p_m}\mathrm{ad}(y)^{q_m-1}(y)$$

であり $q_m = 0$ のときは

$$\sigma(x^{p_1}y^{q_1}\cdots x^{p_m}) = \mathrm{ad}(x)^{p_1}\mathrm{ad}(y)^{q_1}\cdots\mathrm{ad}(x)^{p_m-1}(x)$$

となる．明らかに $\mathrm{ad}(y)(y) = 0$ であるから $q_m \geq 2$ のときは0となる．同様にして $q_m = 0$ で $p_m \geq 2$ のときは0となる．したがって0でないのは $q_m = 1$ であるか $q_m = 0$ で $p_m = 1$ の場合だけである．

ここで上の定理を用いれば次の Hausdorff の公式が得られる：

$$\log(\exp x \exp y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{とおいて} \quad z_n = \frac{1}{n}\sum_{p+q=n}(z_{p,q}' + z_{p,q}'') \quad \text{として}$$

$$z_{p,q}' = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=p \\ q_1+\cdots+q_{m-1}=q-1 \\ p_i+q_i\geq 1 \\ p_m\geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\mathrm{ad}(x)^{p_1}\mathrm{ad}(y)^{q_1}\cdots\mathrm{ad}(x)^{p_m}(y)}{p_1!q_1!\cdots p_m!}$$

$$z_{p,q}'' = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_{m-1}=p-1 \\ q_1+\cdots+q_{m-1}=q \\ p_i+q_i\geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\mathrm{ad}(x)^{p_1}\mathrm{ad}(y)^{q_1}\cdots\mathrm{ad}(y)^{q_{m-1}}(x)}{p_1!q_1!\cdots q_{m-1}!}$$

§12. 巡回表現

この節においても L は複素半単純線形リー代数として，$\mathfrak{h}$ はその Cartan 部分代数，Φ はルート系，Δ はその基本系とする．

いま (ρ, V) を L の無限次元かもしれない表現とする．λ を ρ のウェイトとする．今後簡単のために $V_{\lambda,\rho}$ は単に V_λ とかくことにする．

いま V の0でないベクトル v が λ をウェイトにもつ原始ベクトルであるということを次の条件をみたすことと定義する：

(i)　$v \in V_\lambda$　　すなわち　$\rho(H_i)v = \lambda(H_i)v$　　$(1 \leq i \leq l)$ ここに $H_1, \cdots, H_l$ は $\mathfrak{h}$ の基底とする．

(ii)　すべての $\beta \in \Phi^+$ について

$$\rho(X_\beta)v = 0$$

ここに $X_\beta \neq 0$ は $X_\beta \in L_\beta$ である．さらに $Y_\beta \neq 0$ は $Y_\beta \in L_{-\beta}$ であって $[X_\beta, Y_\beta] = H_\beta$ が成立しているものとする．

この状況で V の複素線形部分空間 W を v を含んで ρ で閉じた最小の複素線形部分空間とする．もっと正確にいえば

$$\rho(Z_1)\cdots\rho(Z_k)v \qquad (Z_1, \cdots, Z_k \in L)$$

の形で表されるベクトルの有限和の全体である.

いま一般的な注意として $\mathcal{U}$ を L の包絡代数とすれば明らかに ρ は $\mathcal{U}$ の上の代数としての表現に一意的に拡大できる.

いま Φ^+ の元を並べて $\beta_1, \cdots, \beta_N$ として，L の基底を次の順序に並べることにする：

$$Y_{\beta_1}, \cdots, Y_{\beta_N}, X_{\beta_1}, \cdots, X_{\beta_N}, H_1, \cdots, H_l$$

いま L を $\mathcal{U}$ の部分リー代数と考えることにすれば次の形は $\mathcal{U}$ の基底になっている：

$$Y_{\beta_1}{}^{k_1}\cdots Y_{\beta_N}{}^{k_N}X_{\beta_1}{}^{l_1}\cdots X_{\beta_N}{}^{l_N}H_1{}^{m_1}\cdots H_l{}^{m_l}$$

ここに $k_i, l_i, m_i \geq 0$ とする.

いま $\rho(H_i)v = \lambda(H_i)v$, $\rho(X_{\beta_i})v = 0$ であることを考えれば，W は次の形の元から生成されることがわかる：

$$\rho(Y_{\beta_1})^{k_1}\cdots\rho(Y_{\beta_N})^{k_N}v$$

この状況で次の定理が成立する.

定理 1. (ρ, V) を L の無限次元かもしれない表現，λ を V のウェイト，v を λ をウェイトとする原始ベクトルとする．このとき W を上で定義されたものとすれば次の性質が成立する.

(i) W は ρ-不変な 0 でない V の複素線形部分空間である.

(ii) ρ を W の上に制限した部分表現を σ として，ω を σ のウェイトとすれば

$$\omega = \lambda - m_1\alpha_1 - \cdots - m_l\alpha_l$$

と表される．ここに $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ は Δ の元の全体であり，$m_1, \cdots, m_l$ は負でない整数である.

(iii) σ のウェイトとしての λ の重複度，すなわち $W_{\lambda,\sigma}$ の次元は 1 に等しい.

［証明］ W が ρ-不変すなわち ρ で閉じていることは明らかである．W の元は次の形の一次結合で表される：

$$\rho(Y_{\beta_1})^{k_1}\cdots\rho(Y_{\beta_N})^{k_N}v \in V_{\lambda-k_1\beta_1-\cdots-k_N\beta_N}$$

いま $W_\lambda = W \cap V_\lambda$ と定義すれば上の式は W が W_λ の直和になっていることを意味する.

特に W_λ は $k_1 = \cdots = k_N = 0$ の場合であるから $W_\lambda = Cv$ であることがわかり (iii) が得られた.

いま ω を σ のウェイトとすれば

$$\omega=\lambda-k_1\beta_1-\cdots-k_N\beta_N$$

が成立するが，β_i は $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ の負でない係数による一次結合として表されるから全体として

$$\omega=\lambda-m_1\alpha_1-\cdots-m_l\alpha_l$$

なる負でない整数 $m_1,\cdots,m_l$ が存在することがわかる．■

$\mathcal{E}$ を前に定義した $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ で生成されるユークリッド空間として $\leq$ をそこでの半順序とする．

いま (ρ,V) を L の無限次元かもしれない表現とするとき，ρ のすべてのウェイトのなかで $\leq$ に関して最大となるウェイトが存在するならば，そのウェイトを ρ の最高のウェイトという．

いま λ が ρ のウェイトで v を λ をウェイトとする V の原始ベクトルとする．このとき定理1での W が V と一致するときに (ρ,V) は v をウェイト λ の原始ベクトルとする巡回表現という．

以下単に (λ,v) -巡回表現という．巡回表現の場合には定理1において $V=W$ したがって $\sigma=\rho$ となる．この巡回表現の場合に次の定理が成立する．

定理 2． (ρ,V) を L の無限次元かもしれない (λ,v)-巡回表現とする．このとき次の性質が成立する：

(i) V は $\rho(Y_{\beta_1})^{k_1}\cdots\rho(Y_{\beta_N})^{k_N}\,v$ の形の元から張られる．ここに $k_1,\cdots,k_N$ は負でない整数とする．特に V はそのウェイト空間の直和になっている．

(ii) V のウェイトは $\omega=\lambda-m_1\alpha_1-\cdots-m_l\alpha_l$ の形で表される．ここに $m_1,\cdots,m_l$ は負でない整数である．したがってすべてのウェイト ω について $\omega\leq\lambda$ が成立する．すなわち λ は最高のウェイトである．

(iii) すべてのウェイト ω について V_ω は有限次元である．さらに $\dim V_\lambda=1$ である．

(iv) すべての ρ で閉じている V の複素線形部分空間 U は $U\cap V_\mu$ の形のウェイト空間の直和になっている．

(v) V は ρ で閉じている2つの複素線形部分空間 U_1 と U_2 との直和 $U_1\oplus U_2$ の形に分解することはできない．しかも ρ に関して閉じた最大の複素線形部分空間 U_0 が存在する．U_0 は最大であるからただ一通りに定まる（もちろん ρ が既約のときは

U_0 は0とする.). したがって ρ は V/U_0 の上で既約な無限次元かもしれない表現になっている. さらに V/U_0 は (ω, v_0)-巡回表現になっている. ここに v_0 は $v+U_0$ によって表される V/U_0 の元である.

[証明] (i) と (ii) は定理1より明らか.

(iii) は後半は定理1より明らか. 前半は $\omega=\lambda-\sum_{i=1}^{N} k_i\beta_i$ となる負でない整数 $k_1, \cdots, k_N$ の組が有限個しかないことから明らか.

(iv) U と ρ について閉じている V の複素線形部分空間とする. いま $u\in U$ として $u=\sum_i v_i$ で v_i は V_{μ_i} の元であったとする. このときにすべての v_i が再び U の元であることをいえばよい. もしそうならない $u=v_1+\cdots+v_n$ があったとして n がそのような数のなかで一番小さいものとする. いま $H\in\mathfrak{h}$ であって $\mu_1(H)\neq\mu_2(H)$ なるものが存在する. このとき

$$\rho(H)n=\sum\mu_i(H)v_i$$

が再び U の元であるから

$$(\rho(H)-\mu_1(H))n=(\mu_2(H)-\mu_1(H))v_2+\cdots+(\mu_n(H)-\mu_1(H))v_n\neq 0$$

となって n の最小性に矛盾する.

(v) いま U を ρ で閉じた V の複素線形部分空間として $U\neq V$ とすれば, V は巡回表現であるから

$$U\cap V_\lambda=0$$

が成立する. したがってすべての ρ で閉じた V の複素線形真部分空間の直和を U_0 とすれば, 明らかに U_0 は ρ で閉じた複素線形部分空間であり (iv) によって $U_0\cap V_\lambda=0$ が成立する. すなわち U_0 は最大の ρ で閉じた複素線形真部分空間になる. $V=U_1\oplus U_2$ と ρ で閉じた部分空間の直和になるとすると $U_i\subseteq U_0$ $(i=1,2)$ となって矛盾する. ■

系　定理の (ρ, V) がさらに (λ', v')-巡回表現になったとすれば, $\lambda=\lambda'$ であって $v'=cv$ $(c\neq 0)$ となる.

[証明] $\lambda=\lambda'$ は定理の (ii) から $\lambda\leq\lambda'$ で $\lambda'\leq\lambda$ となるから明らか. その上では $v'=cv$ $(c\neq 0)$ は (iii) から明らか. ■

定理3. (ρ, V) を L の無限次元かもしれない既約表現, λ を ρ のウェイトとするとき, 次の3つの条件は互いに同等である:

(i) λ は最高のウェイトである.

(ii)　$\lambda+\beta_1, \cdots, \lambda+\beta_N$　がすべてウェイトでない.

(iii)　λ をウェイトにもつ V の原始ベクトルが存在する.

［証明］（i）を仮定すれば（ii）は明らか.

（ii）を仮定して V_λ の 0 でない元を v とすれば，それは λ をウェイトにもつ原始ベクトルであることは明らか.

（iii）を仮定してその原始ベクトルの 1 つを v とおき，この v から定理 1 の W を作れば ρ-不変であることと，ρ が既約であることから $W=V$ となる．したがって λ は最高のウェイトとなる. ■

系 1.　既約表現 ρ には最高のウェイトが存在する.

［証明］ρ のウェイトを λ とすれば $\lambda(H_i)$ は $\rho(H_i)$ の固有値になっている．ρ は有限次元だから $\rho(H_i)$ の固有値の数は有限個しかない．またすべての $i=1, \cdots, l$ に対して $\lambda(H_i)$ を定めれば λ が定まるので ρ のウェイトの数は有限個しかない．したがってその極大元をとれば定理の（ii）をみたすから最高のウェイトになっている. ■

系 2.　ρ を無限次元かもしれない既約表現，λ はその最高のウェイトとする．ρ の原始ベクトルは V_λ の 0 でない元であり，逆に V_λ の 0 でない元はすべて ρ の原始ベクトルである.

［証明］前定理 2 の系より明らか. ■

定理 4.　(ρ, V) を L の無限次元かもしれない既約表現で最高のウェイト λ をもっているとすれば，(ρ, V) は巡回表現である.

［証明］V_λ の 0 でない元を v とすれば，v は原始ベクトルである．したがって v から定理 1 の W を作れば ρ が既約なことから $W=V$ となる．すなわち (ρ, V) は巡回表現である. ■

系　有限次元の既約表現は巡回表現である.

定理 5.　(ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) とを L の 2 つの無限次元かもしれない既約な巡回表現とするとき，(ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) とが同値であるための必要十分条件は (ρ_1, V_1) の最高のウェイトと (ρ_2, V_2) の最高のウェイトが一致することである.

［証明］まず (ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) とが同値であるとすれば，すべての $Z \in L$ に対して

$$\rho_2(Z) = S\rho_1(Z)S^{-1}$$

となる複素線形同型写像 $S: V_1 \longrightarrow V_2$ が存在する．このとき λ を ρ_1 のウェイトとすれば

$$\rho_1(H)v=\lambda(H)v \quad から \qquad \rho_2(H)Sv=\lambda(H)Sv$$

がでるから λ は ρ_2 のウェイトとなる．同様に ρ_2 のウェイトは ρ_1 のウェイトとなるから，ρ_1 のウェイトの全体と ρ_2 のウェイトの全体とは一致する．ことに ρ_1 の最高のウェイトと ρ_2 の最高のウェイトとは一致する．

次に ρ_1 の最高のウェイトと ρ_2 の最高のウェイトとが同じものとしてそれを λ とする．$V=V_1\oplus V_2$ として V の上の表現 ρ を次の式で定義する：

$$\rho(Z)(u_1\oplus u_2)=\rho_1(Z)u_1\oplus\rho_2(Z)u_2$$

次に v_i $(i=1,2)$ をそれぞれ ρ_i の原始ベクトルとすれば前定理の系により，v_i は λ をウェイトにもつ．この v と ρ によって定理1の W と σ を作る．いま (σ, W) と (ρ_1, V_1) とが同値であることを証明すれば，同様にして (σ, W) と (ρ_2, V_2) とが同値であることがいえて証明が完成する．

$P_i: V\longrightarrow V_i$ を $P_i(u_1\oplus u_2)=u_i$ によって定義し，P_1 を W に制限したものを P_0 とする．

$w\in W$ として，w が V の元として $w_1\oplus w_2$ の形とすれば，$P_0w=w_1$ であるから

$$\begin{aligned}P_0\sigma(Z)w&=P_0(\rho_1(Z)w_1\oplus\rho_2(Z)w_2)=\rho_1(Z)w_1\\&=\rho_1(Z)P_0w\end{aligned}$$

したがって σ と ρ_1 とが同値であることを示すためには，P_0 が W から V_1 の上への同型写像であることをいえばよい．

いま ρ_1 と v_1 から作られる定理1の W に相当するものを W_1 とすれば ρ_1 は既約であるから $V_1=W_1$ となる．したがって V_1 の任意の元は

$$\rho_1(Y_{\beta_1})^{k_1}\cdots\rho_1(Y_{\beta_N})^{k_N}v_1$$

の形の一次結合の形でかかれている．ところで明らかに

$$P_0(\rho(Y_{\beta_1})^{k_1}\cdots\rho(Y_{\beta_N})^{k_N}(v_1\oplus v_2))=\rho_1(Y_{\beta_1})^{k_1}\cdots\rho_1(Y_{\beta_N})^{k_N}v_1$$

が成立するから P_0 が V_1 の上への写像であることがわかった．

さて $w=w_1\oplus w_2\in W$ として $P_0w=w_1=0$ とすれば $w=w_2$ の形であるから，$P_0w=0$ は V_2 を $V_1\oplus V_2$ の部分空間と考えた上で $w\in W\cap V_2$ を意味する．したがって P_0 が1対1であることをいうためには $W\cap V_2=0$ をいえばよい．W は ρ-不変であるから $W\cap V_2$ は ρ_2- 不変である．したがって $W\cap V_2$ に入っていない元が1つでもみつかれば ρ_2 が既約であることから $W\cap V_2=0$ となって証明が完成する．

このためには $v_2 \notin W \cap V_2$ をいえばよい.

いま $v_2 \in W \cap V_2$ とすれば, v_1, v_2 共に W の元となるから, 任意の $H \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma(H)v_1 \oplus \sigma(H)v_2 = \sigma(H)(v_1 \oplus v_2) &= \rho(H)(v_1 \oplus v_2)\\ &= \rho_1(H)v_1 \oplus \rho_2(H)v_2\\ &= \lambda(H)v_1 \oplus \lambda(H)v_2\end{aligned}$$

であるから, $\sigma(H)v_2 = \lambda(H)v_2$ がでる. ところで λ の重複度は1であるから $v_2 = cv$ $(c \in C)$ と表されることになり矛盾する. ▩

さて, いま λ を $\mathfrak{h}$ の上の複素線形汎関数とする. このとき新しい文字 v^+ をとってきて L の (λ, v^+) -巡回表現 $(\rho, Z(\lambda))$ を次のように定義する:

(i) $Z(\lambda)$ を集合としては次の式で定義する:

$$Z(\lambda) = \{uv^+ | u \in \mathcal{U}\}$$

さらに $(au_1 + bu_2)v^+ = au_1v^+ + bu_2v^+$ とする.

(ii) h が $H \in \mathfrak{h}$ に対応する $\mathcal{U}$ の元とするとき

$$hv^+ = \lambda(H)v^+$$

とする.

(iii) $x_\alpha (\alpha \in \Phi^+)$ に対して次のルールをおく:

$$x_\alpha v^+ = 0$$

以上の計算規則によってできる複素線形空間 $Z(\lambda)$ を表現空間として表現 $(\rho, Z(\lambda))$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\rho(X_\alpha)uv^+ &= (x_\alpha u)v^+\\ \rho(Y_\alpha)uv^+ &= (y_\alpha u)v^+\\ \rho(H)uv^+ &= (hu)v^+ \qquad \text{ここに} \quad H \in \mathfrak{h}\end{aligned}$$

このように定義したときに $(\rho, Z(\lambda))$ が (λ, v^+) - 巡回表現になっていることは明らかであろう. この巡回表現を今後単に $Z(\lambda)$ で表すことにする. このことから次の定理が容易に証明される.

定理 6. λ を $\mathfrak{h}$ の上の複素線形汎関数とするとき, λ を最高のウェイトとする既約な巡回表現が存在する.

［証 明］ 定理2によって $(\rho, Z(\lambda))$ には最大の ρ で閉じた複素線形部分空間 U_0 が存在する. いま $V(\lambda) = Z(\lambda)/U_0$ とおいて ρ から $V(\lambda)$ の上に導かれる L の表現を ρ_0

とすれば $(\rho_0, V(\lambda))$ が λ を最高のウェイトとする既約巡回表現になっていることは明らかである. ■

この定理で表される λ を最高のウェイトとする無限次元かもしれない既約な巡回表現 $V(\lambda)$ は定理5により同型の意味でただ一通りに定まる. 今後 $V(\lambda)$ によって表すことにする. $V(\lambda)$ は一般には無限次元である.

Weyl の定理によって L の表現は既約表現の直和になるから, L の表現を調べるためには L の既約表現を調べれば十分である. L の既約表現を調べるためにはどのような λ のとき $V(\lambda)$ が有限次元になるかを調べれば十分である.

いま $V(\lambda)$ が有限次元であるとすれば, λ は既約表現のウェイトであるから $\langle\lambda, \alpha_i\rangle \in \boldsymbol{Z}$ となる, ここに $\alpha_i \in \varDelta$ とする. $H_i = H_{\alpha_i}$ であるから, これは $\lambda(H_i) \in \boldsymbol{Z}$ を意味する. いずれにせよもし $V(\lambda)$ が有限次元ならば, λ は整ウェイトになっている. さらに §9 定理2からあるいは $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ の表現論から λ の H_i の上の値は0を中心にして対称になるから, λ が最高のウェイトならば $\langle\lambda, \alpha_i\rangle \geq 0$ となる. すなわち$\langle\lambda, \alpha_i\rangle$ は負でない整数になる. すなわち λ は支配的な整ウェイトである. すなわち $\lambda \in \varLambda^+$ となっている.

したがって以下に $\lambda \in \varLambda^+$ として $V(\lambda)$ の性質を調べることにする. 我々の目的は $\lambda \in \varLambda^+$ ならば $V(\lambda)$ が有限次元になることを証明することである. すなわちすべての既約表現は $\lambda \in \varLambda^+$ としたときの $V(\lambda)$ の形であって, λ を定めれば (同型の意味で) 一意的に定まるのである.

まず $\lambda \in \varLambda^+$ として, ρ を $V(\lambda)$ を表現空間とする L の巡回表現, $\varPi(\lambda)$ を $(\rho, V(\lambda))$ のウェイト全体の集合とする.

以下でひとまず $\varPi(\lambda)$ の一般的性質を調べることにする. まず次の性質が $\varPi(\lambda)$ で成立する:

$$\omega \in \varPi(\lambda),\ \alpha \in \varPhi,\ 0 \leq i \leq \langle\lambda, \alpha\rangle \implies \lambda - i\alpha \in \varPi(\lambda)$$

これは §9 定理2から明らかである. この性質は $\varPi(\lambda)$ の充満性と呼ばれる.

この特別な場合として次の式が成立する:

$$\omega \in \varPi(\lambda),\ \alpha \in \varPhi \implies \sigma_\alpha(\omega) = \omega - \langle\omega, \alpha\rangle\alpha \in \varPi(\lambda)$$

すなわち $\varPi(\lambda)$ は σ_α で閉じている. σ_α が $\mathcal{W}$ を生成するから任意の $\sigma \in \mathcal{W}$ に関して $\varPi(\lambda)$ が閉じていることがわかる.

補題 1. いま $\lambda, \mu \in \varLambda^+$ であって $\mu = \lambda - m_1\alpha_1 - \cdots - m_l\alpha_l$ の形でかかれていると

する．ここに $m_1, \cdots, m_l$ は負でない整数とする．このとき $\mu \in \Pi(\lambda)$ となっている．

［証 明］ いま次の形の $\Pi(\lambda)$ の任意の元 μ' を考える：

$$\mu' = \mu + (k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l)$$

ここに $k_1, \cdots, k_l$ は負でない整数とする．明らかに λ 自身は μ' の形をしている．したがって，この k_i を減らしてもやはり $\Pi(\lambda)$ の元になっていることをいえば μ 自身が $\Pi(\lambda)$ の元であることがわかる．

いま $\mu \neq \mu'$ とすれば

$$(k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l,\ k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l) > 0$$

となるから $k_i > 0$ で $(k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l, \alpha_i) > 0$ となる i が存在する．したがって $\langle k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l, \alpha_i\rangle > 0$ となる．$\mu \in \Lambda^+$ であるから $\langle \mu, \alpha_i\rangle \geq 0$ したがって $\langle \mu', \alpha_i\rangle > 0$ となり $\Pi(\lambda)$ は充満しているから $\mu' - \alpha_i \in \Pi(\lambda)$ となって証明が完了した．■

補 題 2. $\lambda \in \Lambda^+$ で $\mu \in \Pi(\lambda)$ とすれば次の不等式が成立し，そこで等号が成り立つのは $\mu = \lambda$ のときに限る：

$$(\mu + \delta, \mu + \delta) \leq (\lambda + \delta, \lambda + \delta)$$

［証 明］ μ が支配的でなければ，$\sigma\mu$ が支配的になる $\sigma \in \mathcal{W}$ をとって $\sigma\mu$ について証明すればよいから，最初から μ が支配的としてよい．

$\omega = \lambda - \mu$ とおけば ω は正のルートの正係数の一次結合で表されるから

$$(\lambda + \delta, \omega) + (\omega, \mu + \delta) \geq (\lambda + \delta, \omega) \geq 0$$

が成立する．しかも $=$ が成立するのは $\lambda + \delta$ が狭義に支配的であるから $\omega = 0$ すなわち $\lambda = \mu$ のときだけである．計算すればすぐわかるように不等式の左辺は $(\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta)$ に等しいから補題は証明された．■

さて $\lambda \in \Lambda^+$ のときの $V(\lambda)$ の有限性のために次の補題を証明する．

補 題 3. $\mathcal{U}$ を L の包絡代数とするとき $k \geq 0$, $1 \leq i, j \leq l$ なる k, i, j について次の式が成立する：

（i） $i \neq j$ ならば　　$[x_j, y_i^{k+1}] = 0$

ここに X_j は X_{α_j}, Y_i は Y_{α_i} で x_j, y_i はそれぞれ X_j, Y_i に対応する $\mathcal{U}$ の元とする．以下この規約に従うことにする．

(ii)　　$[h_j, y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(H_j)y_i^{k+1}$

(iii)　　$[x_i, y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k - h_i)$

［証明］ $[x_j, y_i^{k+1}] = [x_j, y_i]y_i^k + y_i[x_j, y_i^k]$ であるから（i）は $[x_j, y_i] = 0$ だけを証明すればよい．これは §7 補題3から $\alpha_j - \alpha_i$ がルートでないことから明らか．

（ii） は k についての帰納法で証明する．$k = 0$ の場合は $[h_j, y_i] = -\alpha_i(H_j)y_i$ だからよい．一般の場合も

$$[h_j, y_i^{k+1}] = [h_j, y_i]y_i^k + y_i[h_j, y_i^k]$$

を用いて計算すれば直ちにでる．

（iii） も数学的帰納法でする．$k = 0$ のときは直接計算から明らか．一般の場合はこの証明の最初の式で $i = j$ とした式を用いれば明らか．■

定理 7. $\lambda \in \Lambda^+$ とすれば $V(\lambda)$ は有限次元であり，$\Pi(\lambda)$ は $\mathcal{W}$ で閉じており，$\sigma \in \mathcal{W}$，$\mu \in \Pi(\lambda)$ について次の式が成立する．ここに $V = V(\lambda)$ とする：

$$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$$

［証明］ $V = V(\lambda)$ の原始ベクトルを v^+ とかき，$V(\lambda)$ によってできる L の表現を ρ とかくことにする．さらに $m_i = \lambda(H_i) = \langle\lambda, \alpha_i\rangle$ $(1 \leq i \leq l)$ とする．もちろん m_i は負でない整数になっている．

1)
$$y_i^{m_i+1}v^+ = 0$$

$w = y_i^{m_i+1}v^+$ とおけば，補題3の（i）により $i \neq j$ のときは $x_jw = 0$ となる．$i = j'$ のときは

$$x_iy_i^{m_i+1}v^+ = y_i^{m_i+1}x_iv^+ - (m_i + 1)y_i^{m_i}(m_iv^+ - m_iv^+) = 0$$

となる．したがって $x_iw = 0$ となる．したがって w が0でなければ w は原始ベクトルとなる．ところで w のウェイトは $\lambda - (m_i + 1)\alpha_i$ で λ と異なるから矛盾する．

2) すべての $i(1 \leq i \leq l)$ について $v^+, y_iv^+, y_i^2v^+, \cdots, y_i^{m_i}v^+$ で張られる部分空間 U_i は x_i, y_i, h_i について閉じている．

以下に x_i, y_i, h_i について閉じていることを i について閉じているということにする．U_i が y_i について閉じていることは 1) から明らかである．h_i について閉じていることは $y_i^kv^+ \in V_{\lambda-k\alpha_i}$ となるから $h_iy_i^kv^+ = (\lambda(H_i) - k\alpha_i(H_i))y_i^kv^+$ となって明らかである．最後に x_i について閉じていることは補題3の 3) を用いて数学的帰納法を行えばよい．

3) V は i で閉じている有限次元の複素線形部分空間の和になっている．

V' を i で閉じている有限次元の複素線形部分空間の和としてできる線形空間とする．このとき 2) によって V' は0以外の元をもっている．いま W を任意の i で閉じてい

る有限次元の複素線形部分空間とする．このとき $\widetilde{W}$ を $x_\alpha W$ $(\alpha \in \Phi)$ から生成される部分空間とすれば，Φ の元が有限個であるから，$\widetilde{W}$ は有限次元である．ところで x_α と x_i, y_i, h_i の交換関係を用いれば $x_i x_\alpha, y_i x_\alpha, h_i x_\alpha$ はそれぞれ $x_\alpha x_i, x_\alpha y_i, x_\alpha h_i$ と x_β, h_i, y_i でかき直せるから，$\widetilde{W}$ が i で閉じていることがわかる．(x_α は y_β とする．ここに $-\alpha = \beta \in \Phi^+$) したがって V' はすべての x_α について閉じていることがわかる．ところで $h_j = [x_j, y_j]$ であるから h_j に関しても閉じている．V は既約であるから $V' = V$ となる．

4) $1 \leq i \leq l$ なる i に対して，x_i と y_i とは V の上で局所的にべき零である．ここで局所的にべき零であるということは，どんな $v \in V$ をとっても，十分大きな k をとれば $x_i^k v = 0$，$y_i^k v = 0$ となることを意味している．

いま $v \in V$ で $v = v_1 + \cdots + v_m$ とすれば，すべての v_j についてべき零とすれば，v についてべき零となる．したがって 3) により，v は i に関して閉じている有限次元の複素線形部分空間 U のなかに入っているとしてよい，ということは $\rho_0(E_{12}) = x_i, \rho_0(E_{21}) = y_i, \rho_0(E_{11} - E_{22}) = h_i$ とおくことによって $\mathfrak{sl}(2, C)$ の表現 (ρ_0, U) が得られる．U は有限個のウェイト空間の直和になっているから，v が h_i の固有ベクトルになっているとしてよい．ところでこの場合は §4 補題 6 の証明によって明らかである．

5) いま $\exp(x_i)$ を考えれば，V のそれぞれのベクトル v について x_i^k の k の十分大きいところを作用させれば 0 となってしまうから，$\exp x_i$ は V の上で定義されている．したがって $s_i = \exp x_i \exp(-y_i) \exp x_i$ とすれば s_i は $\mathrm{End}(V)$ の元になっている．

6) μ を V の任意のウェイトとすれば，$s_i(V_\mu) = V_{\sigma_i \mu}$ が成立する．ここに σ_i は σ_{α_i} のことである．

いま $H \in \mathfrak{h}$ として H に対応する $\mathcal{U}$ の元を h とするとき

$$v \in V_\mu \implies s_i v \in V_{\sigma_i \mu}$$

を証明するためには $v \in V_\mu$ として次のことを証明すればよい：

$$h(s_i v) = (\sigma_i \mu)(h) s_i v$$

ところで $\mathfrak{h}$ は $\alpha_i(h) = 0$ なる h と h_i とで張られるから $\alpha_i(h) = 0$ なる場合と h_i とについて上のことを証明すればよい．いま $\alpha_i(h) = 0$ とすれば $[h, x_i] = \alpha_i(h) x_i$ であるから h と x_i とは交換可能になる．同様にして h と y_i とも交換可能，したがって h と s_i とは交換可能になる．ところで一方 $\sigma_i \mu = \mu - \langle \mu, \alpha_i \rangle \alpha_i$ であるから $(\sigma_i \mu)(h) = \mu(h)$ となる．全体として

$$h(s_i v) = s_i(hv) = s_i(\mu(h)v) = (\sigma_i\mu)(h)s_i v$$

となって証明された.

したがって $h_i(s_i v) = (\sigma_i\mu)(h_i)s_i v$ をいえばよい. いま v は i で閉じている有限次元の V' のなかに入っている. $\mathfrak{sl}(2,C)$ の表現は完全可約だからその既約の部分について上の式が成立すればよい. すなわち $\mu(h_i) = m$ すなわち $h_i v = mv$ とすれば

$$(\sigma_i\mu)(h_i) = -m$$

また §4 の最後の議論での τ と s_i とは同じになるから, $h_i(s_i v) = -ms_i v$ となって証明が終った.

7) $\Pi(\lambda)$ は $\mathcal{W}$ で閉じていて $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ $(\mu \in \Pi(\lambda),\ \sigma \in \mathcal{W})$ となる.

$\mathcal{W}$ は $\sigma_1, \cdots, \sigma_l$ で生成されるから, これは 6) から直ちにでる.

8) $\Pi(\lambda)$ は有限である.

$\Pi(\lambda)$ のすべての元は §9 定理3によって $\mathcal{W}$ の元によって $\Pi(\lambda)$ のなかの支配的なウェイトに移る. $\mathcal{W}$ は有限であるから $\Pi(\lambda)$ のなかの支配的なウェイトが有限であることをいえばよい. ところでこれは §9 の補題2によって明らかである.

9) V は有限次元である.

定理2によって $\mu \in \Pi(\lambda)$ について V_μ は有限次元である. ところで $\Pi(\lambda)$ は有限個であるから全体として V は有限次元である. ▩

系 Λ^+ の元 λ に $V(\lambda)$ を対応させることによって Λ^+ の元と L の既約表現とが1対1に対応している.

§13. Freudenthal の公式

L はこの節でも複素半単純線形リー代数として, $\mathfrak{h}$ はその Cartan 部分代数とする.

$\lambda \in \Lambda^+$ で μ は整ウェイト, $V(\lambda)$ は前節で定義された λ を最高のウェイトとする既約表現として, μ の $V(\lambda)$ における重複度 $m_\lambda(\mu)$ を

$$m_\lambda(\mu) = \dim V(\lambda)_\mu$$

と定義する. もちろん μ が $V(\lambda)$ のウェイトでないときは $m_\lambda(\mu) = 0$ とする. λ が固定されているときは $m(\mu)$ と略することにする.

さて L の包絡代数 $\mathcal{U}$ を考える. $H_1, \cdots, H_l$ を $H_i = H_{\alpha_i}(\alpha_1, \cdots, \alpha_l \in \Delta)$ をみたす $\mathfrak{h}$ の基底とする. κ は非退化であるから $K_1, \cdots, K_l$ を次の式をみたす $\mathfrak{h}$ の元と定義する:

$$\kappa(H_i, K_j) = \delta_{ij}$$

前と同じように X_α, Y_α $(\alpha\in\Phi)$ を $X_\alpha\in L_\alpha$, $Y_\alpha\in L_{-\alpha}$ として $[X_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha$ となるようにする.

いま $\kappa(X_\alpha, Z_\alpha)=1$ となるように $Z_\alpha\in L_{-\alpha}$ を選ぶことにする.

明らかに次の式が成立する：

$$[X_\alpha, Z_\alpha]=T_\alpha=\frac{(\alpha,\alpha)H_\alpha}{2}$$

いま $\mathcal{U}$ の Casimir 元 C を次のように定義する：

$$C=\sum_{i=1}^{l}H_iK_i+\sum_{\alpha\in\Phi}X_\alpha Z_\alpha\in\mathcal{U}$$

次に $H_1,\cdots,H_l,X_\alpha(\alpha\in\Phi)$ を適当に並べたものを $X_1,\cdots,X_m$, それれと同じ順序に $K_1,\cdots,K_l,Z_\alpha$ $(\alpha\in\Phi)$ を並べたものを $Y_1,\cdots,Y_m$ とすれば C は次の形になっている：

$$C=\sum_i X_iY_i$$

これから Casimir 作用素で行った計算を ρ を抜いて行えば, C が $X_1,\cdots,X_n$ のすべての元と交換可能したがって $\mathcal{U}$ のすべての元と交換可能であることがわかる.

いま ρ を L の表現, X を L の任意の元とすれば $\rho(C)$ は $\rho(X)$ と交換可能であり, さらに ρ が既約ならば $\rho(C)$ はスカラーであることがわかる.

次に $\rho(C)$ と Casimir 作用素 C_ρ との関係を調べるために次の補題を証明する.

補題 1. L は単純として, X, Y は共に L の元を走るものとして, $f(X,Y)$ と $g(X,Y)$ は共に L の上の非退化な複素線形双一次形式で次の2つの条件をみたすものとする：

対称性 $\quad f(X,Y)=f(Y,X),\qquad g(X,Y)=g(Y,X)$

結合性 $\quad f([X,Y],Z)=f(X,[Y,Z]),\qquad g([X,Y],Z)=g(X,[Y,Z])$

このとき0でない複素数 a で次の条件をみたすものが存在する：

$$X,Y\in L\implies f(X,Y)=ag(X,Y)$$

［証明］ f も g も非退化であるから, 任意の $X\in L$ に対して次の条件をみたす $X'\in L$ がただ一通り存在する：

$$Y\in L\implies f(X,Y)=g(X',Y)$$

X に対して X' を対応させる写像を π とおけば, $\pi: L\longrightarrow L$ であって明らかに π は複素線形である. さらに π が1対1であることも明らかである. さらに次の式が成立する：

$$\begin{aligned}f([X,Y],Z)&=f(X,[Y,Z])\\&=g(\pi(X),[Y,Z])=g([\pi(X),Y],Z)\end{aligned}$$

すなわち次の式が成立する：

$$\pi([X, Y]) = [\pi(X), Y]$$

いま L を複素線形空間としてみたものを V とおけば $\pi \in \mathrm{End}(V)$ である．さらに L が単純であることは $\mathrm{ad}: L \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ が既約であることを意味する．ところで

$$\begin{aligned}[\pi, \mathrm{ad}(X)](Y) &= \pi(\mathrm{ad}(X)Y) - \mathrm{ad}(X)\pi(Y) \\ &= \pi([X, Y]) - [X, \pi(Y)] = 0\end{aligned}$$

であるから Schur の補題により $\pi(X) = aX$ となる 0 でない複素数 a が存在する．すなわち $f(X, Y) = ag(X, Y)$ が証明された．■

さて L を単純として (ρ, V) を L の 0 でない表現とする．したがって ρ は 1 対 1 の表現である．いま $f(X, Y)$ を

$$f(X, Y) = \mathrm{Tr}(\rho(X)\rho(Y))$$

とおけば補題により 0 でない複素数 a で

$$\mathrm{Tr}(\rho(X)\rho(Y)) = a\kappa(X, Y)$$

となるものが存在する．これから Casimir 作用素 C_ρ と Casimir 元 C との作り方を比べれば，明らかに

$$\rho(C) = \frac{1}{a} C_\rho$$

という関係式が成立することがわかる．

さて次に一般の場合 L が半単純の場合を考えることにする．このとき $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$ と L は相異なる単純イデアル $L_1, \cdots, L_t$ の直和になっており，L_i と $L_j (i \neq j)$ とは κ に関して互いに直交している．

したがって上に選んだ $X_1, \cdots, X_m$ を実は個々の L_i について選んでその和集合になっているとしてよい．したがって $C = C_{L_1} + \cdots + C_{L_t}$ となっている．ここに C_{L_i} は L_i の Casimir 元とする．

いま ρ を L の表現として ρ を L_i に制限したものを ρ_i とすれば $\rho(C_{L_i})$ は $a_i C_{\rho_i}$ となっている．ここで a_i は i に依存するから $\rho(C)$ は aC_ρ の形になっているとはいえないが，$\rho(C)$ と C_ρ とは可換になることがわかる．

さて元に戻って $\lambda \in \Lambda^+$, $V(\lambda)$, $H_1, \cdots, H_l, X_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$, $K_1, \cdots, K_l$, Z_α $(\alpha \in \Phi)$ を前の通りとする．

(ρ, V) を L の表現，μ を (ρ, V) のウェイトとして $\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha)$ を考えれば $\rho(Z_\alpha)$

は V_μ を $V_{\mu-\alpha}$ に移し，$\rho(X_\alpha)$ は $V_{\mu-\alpha}$ を V_μ に移すから

$$\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha): \quad V_\mu \longrightarrow V_\mu$$

が成立する．以下に $\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha)$ のトレースを考えることにする．

L の基底として今度は $X_\alpha(\alpha\in\Phi)$ と $T_1,\cdots,T_l$ をとることにする．$\alpha\in\Phi$ に対して S_α をいつもと同じく $X_\alpha, Z_\alpha, T_\alpha$ で生成される $\mathfrak{sl}(2,C)$ と同型なリー部分代数とする．

さて $\mathfrak{sl}(2,C)$ の既約表現，したがって S_α の既約表現は §4 の記号では $v_0, v_1, \cdots, v_m$ の基底によって表されたのであるが，ここでは次の $w_0, w_1, \cdots, w_m$ をとることにする：

$$w_i = \frac{i!}{(2n)^i} v_i$$

したがって §4 の式の代りに次の式が得られる：

(i)　$$\rho(T_\alpha)w_i = \frac{(\alpha,\alpha)(m-2i)}{2} w_i$$

(ii)　$$\rho(X_\alpha)w_i = \frac{i(m-i+1)(\alpha,\alpha)}{2} w_{i-1} \qquad (w_{-1}=0)$$

(iii)　$$\rho(Z_\alpha)w_i = w_{i+1} \qquad (w_{m+1}=0)$$

したがって次の式が成立する：

$$\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha)w_i = \frac{(m-i)(i+1)(\alpha,\alpha)}{2} w_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

さて μ は ρ のウェイトで $\mu+\alpha$ がウェイトでないものとする．このとき $m=\langle\mu,\alpha\rangle$ とおけば，μ からの α-系列は $\mu, \mu-\alpha, \cdots, \mu-m\alpha$ となっている．$W=V_\mu+V_{\mu-\alpha}+\cdots+V_{\mu-m\alpha}$ とすれば，ρ を S_α に制限した表現を $\rho|S_\alpha$ で表せば，W は $\rho|S_\alpha$ について閉じている．(以下 S_α についてのみ議論するときは $\rho|S_\alpha$ を ρ で表すことにする．)

この S_α の表現 (ρ, W) は完全可約性により既約表現の直和になっている．そのそれぞれの既約表現の最高のウェイトは

$$(\mu-i\alpha)(H_\alpha) = m-2i$$

の形になっている．したがって i を $0\leq 2i\leq m$ なる条件をみたす自然数として，最高のウェイトが $m-2i$ となっているような既約表現が (ρ, W) のなかに入っている個数を n_i とする．

このとき $\dim V_{\mu-i\alpha}=m(\mu-i\alpha)$ は W に制限して (ρ, W) で考えれば m が最高のウェイトである既約表現の部分表現に n_0 次元，$m-2$ が最高のウェイトである既約表

現の部分表現に n_1 次元, … となるために次の式が成立する：

$$m(\mu - i\alpha) = n_0 + \cdots + n_i$$

これから逆に n_i が次の形であることがわかる：

$$n_i = m(\mu - i\alpha) - m(\mu - (i-1)\alpha)$$

さらに $0 \leq 2k \leq m$ となる自然数 k を1つとってきて $\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha)$ の $V_{\mu-k\alpha}$ の上でのトレースを計算することにする．いま i を $0 \leq i \leq k$ をみたす自然数とする．

ここで $m-2i = (\mu - i\alpha)(H_\alpha)$ を最高のウェイトとする S_α の既約表現で上のような基底を $w_0, \cdots, w_{m-2i}$ とすれば $\mu - k\alpha$ のウェイト空間は w_{k-i} で張られる空間になっている．したがって（1）の式で m を $m-2i$ でかえ i を $k-i$ でかえて次の式が得られる：

$$\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha)w_{k-i} = \frac{(m-i-k)(k-i+1)(\alpha,\alpha)}{2} w_{k-i} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

W のなかで最高のウェイトが $m-2i$ な既約表現は n_i 個入っているから，i を0から k まで動かせば $\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha)$ の $V_{\mu-k\alpha}$ の上のトレースは次の式で与えられる．ここに $\dim V_{\mu-k\alpha} = n_0 + \cdots + n_k$ である：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{n_i(m-i-k)(k-i+1)(\alpha,\alpha)}{2} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(m(\mu-i\alpha) - m(\mu-(i-1)\alpha)(m-i-k)(k-i+1)(\alpha,\alpha)}{2} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{m(\mu-i\alpha)(m-2i)(\alpha,\alpha)}{2}\end{aligned}$$

この最後のところで次の式が用いられている：

$$(m-i-k)(k-i+1) - (m-i-k-1)(k-i) = m-2i$$

ところで $m = \langle \mu, \alpha \rangle = \dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ であるから次の式が得られた：

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha) = \sum_{i=0}^{k} m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

さて任意の $\nu \in \Pi(\lambda)$ をとって考えれば $\nu = \mu - k\alpha$, $\mu \in \Pi(\lambda)$ で $\mu + \alpha \notin \Pi(\lambda)$ であるような μ が存在する．この μ についての上の式を用いれば次の式を得る：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{V_\nu}\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha) &= \sum_{i=0}^{k} m(\nu+(k-i)\alpha)(\nu+(k-i)\alpha,\alpha) \\ &= \sum_{i=0}^{k} m(\nu+i\alpha)(\nu+i\alpha,\alpha)\end{aligned}$$

ところで $i > k$ とすれば $m(\nu + i\alpha) = 0$ となるから上の式は次のようにかくことができる：

$$\mathrm{Tr}_{V\mu}\,\rho(X_\alpha)\rho(Z_\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

さて (ρ, V) はいままで通りとして $\dim V > 1$，すなわち $\lambda \neq 0$ とする．L の Casimir 元を C とする．すなわち

$$C = \sum_{i=1}^{l} H_i K_i + \sum_{\alpha \in \Phi} X_\alpha Z_\alpha$$

であった．ρ は既約であるから $\rho(C)$ はスカラー c となる．したがって次の式が成立する：

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu}\,\rho(C) = cm(\mu)$$

さて $\rho(H_i)$ は V_μ の上では $\mu(H_i)$ というスカラーを掛ける作用素である．$\rho(K_i)$ も V_μ の上では同じように $\mu(K_i)$ というスカラーである．

さて κ は非退化であるから，すべての $H \in \mathfrak{h}$ に対して次の式が成立するような $T_\mu \in \mathfrak{h}$ が存在する：

$$\mu(H) = \kappa(T_\mu, H)$$

いま $T_\mu = \sum_{i=1}^{l} a_i H_i$ とすれば，定義により

$$\mu(H_i) = \sum_j a_j \kappa(H_j, H_i)$$

$$\mu(K_i) = \sum_j a_j \kappa(H_j, K_i) = a_i \qquad (K_i \text{ の定義から})$$

したがって次の式が成立する：

$$(\mu, \mu) = \mu(T_\mu) = \sum_{i=1}^{l} a_i \mu(H_i) = \sum_{i=1}^{l} \mu(H_i)\mu(K_i)$$

これから次の式がでる：

$$\sum_i \mathrm{Tr}_{V_\mu}\,\rho(H_i)\rho(K_i) = m(\mu)(\mu, \mu)$$

（3）とこの式から次の式が得られる：

$$cm(\mu) = (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

さてここで $i = 0$ のところの和を考えれば，$\sum_{\alpha \in \Phi} m(\mu)(\mu, \alpha)$ であり，そこには (μ, α) と $(\mu, -\alpha)$ とが入っているから全体として 0 となる．したがって $\sum_{i=1}^{\infty}$ としてよい．

さて上の式では $\mu \in \Pi(\lambda)$ を仮定しているが，一般に $\mu \in \Lambda$ だけで上の式が成立することを証明する．すなわち $\mu \notin \Pi(\lambda)$ の場合に次の式を証明すればよい：

$$0=\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)$$

さて $\mu+i\alpha$ が $\Pi(\lambda)$ に入っているものは α- 系列としてつながっており $\mu \notin \Pi(\lambda)$ であるから，$\mu+i\alpha$ が $\Pi(\lambda)$ に入っているような i はすべて i が正であるか，またはすべてのそのような i が負であるかどちらかである．

もしそのようなすべての i が負である場合には等号の右辺が 0 となることは明らかである．

そのようなすべての i が正である場合は問題をさらに一般化して

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

を証明すればよい．

いまこれを証明するために $\mu+i\alpha$ の形で $\Pi(\lambda)$ の元になるものの全体を

$$\mu+k\alpha,\quad \mu+(k+1)\alpha,\quad \cdots,\quad \mu+(k+m)\alpha$$

とする．いま考えているのは一般の場合であるから k は正でも負でもよいものとする．証明したいことは

$$\sum_{i=k}^{k+m} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)=0$$

である．

このとき $\mu_0=\mu+k\alpha$ とすれば m は

$$m=-\frac{2(\mu_0,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

となっている．

このとき σ_α は α- 系列の順序を逆にするから次の式が成立する：

$$m(\mu_0+i\alpha)=m(\mu_0+(m-i)\alpha)$$

したがって

$$\begin{aligned} &m(\mu_0+i\alpha)(\mu_0+i\alpha,\alpha)+m(\mu_0+(m-i)\alpha)(\mu_0+(m-i)\alpha,\alpha)\\ &\quad=m(\mu_0+i\alpha)(2\mu_0+m\alpha,\alpha)=0\end{aligned}$$

m が奇数の場合はこれで（5）が成立することがわかった．m が偶数のときは

$$\left(\mu_0+\frac{m}{2}\alpha,\alpha\right)=0$$

となるから，すべての場合に（５）が成立することがわかった．

（５） から次の式は明らかであろう：

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu - i\alpha)(\mu - i\alpha, -\alpha) = m(\mu)(\mu, \alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

この式を（４）で $\sum_{i=0}^{\infty}$ を $\sum_{i=1}^{\infty}$ にかえたものに代入すれば

$$cm(\mu) = (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{0<\alpha} m(\mu)(\mu, \alpha)$$
$$+ 2 \sum_{0<\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

前と同じように $\delta = \frac{1}{2} \sum_{0<\alpha} \alpha$ とおけば，この式は次の式となる：

$$cm(\mu) = (\mu, \mu + 2\delta)m(\mu) + 2 \sum_{0<\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

いま $\mu = \lambda$ とすれば $m(\lambda) = 1$ であるから

$$c = (\lambda, \lambda + 2\delta) = (\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\delta, \delta)$$

となるから，次の Freudenthal（フロイデンタール）の公式が得られた：

$$((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta))m(\mu) = 2 \sum_{0<\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

§ 14.　Weyl, Kostant, Steinberg の公式

この節では Weyl, Kostant（コスタント），Steinberg（スタインバーグ）の公式を証明する．

L はやはり複素半単純線形リー代数として，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とする．

Λ を前と同じく $\mathfrak{h}$ の上の整ウェイトの全体とする．$\mu \in \Lambda$ なる μ に対して，それに対応する新しい文字を導入する．ここではその新しい文字を $e(\mu)$ で表すことにする（新しい文字という意味では $\bar{\mu}$ という様なものの方がよいかも知れないが，それは形式だけの問題である）．

この上で次の形のものの全体を $\boldsymbol{Z}[\Lambda]$ で表す．

$$n_1 e(\mu_1) + \cdots + n_k e(\mu_k)$$

ここに $\mu_1, \cdots, \mu_k \in \Lambda$ で $n_1, \cdots, n_k \in \boldsymbol{Z}$ とする．$\boldsymbol{Z}[\Lambda]$ に普通のように加法を定義する．すなわち + による結合は順序をかえてもよいし，さらに

$$ne(\mu) + me(\mu) = (n + m)e(\mu)$$

が成立するものとする．

次に $\boldsymbol{Z}[\Lambda]$ に乗法を次のように定義する：

$$(n_1e(\mu_1)+\cdots+n_ke(\mu_k))(m_1e(\mu_1')+\cdots+m_le(\mu_l'))$$
$$=\sum_{i,j} n_im_je(\mu_i+\mu_j')$$

ここでもちろんあとで $e(\mu_i+\mu_j')$ が等しい項がいくつかあればそれは一つにまとめるのである．

こうすると $\boldsymbol{Z}[\Lambda]$ が可換環であることは明らかであり，$e(0)$ が $\boldsymbol{Z}[\Lambda]$ の乗法の単位元になっている．

さらに $\sigma\in\mathcal{W}$ とするとき，σ を $\boldsymbol{Z}[\Lambda]$ の元に施したものを次の式で定義する：

$$\sigma(n_1e(\mu_1)+\cdots+n_ke(\mu_k))=n_1e(\sigma\mu_1)+\cdots+n_ke(\sigma\mu_k)$$

さて $\lambda\in\Lambda^+$ として $V(\lambda)$ の形式指標 $\mathrm{ch}_{V(\lambda)}$ を次の $\boldsymbol{Z}[\Lambda]$ の元として定義する：

$$\sum_{\mu\in\Pi(\lambda)} m_\lambda(\mu)e(\mu)$$

$\mathrm{ch}_{V(\lambda)}$ は単に ch_λ ともかくことにする．$\mu\notin\Pi(\lambda)$ のときは $m_\lambda(\mu)=0$ となるから，ch_λ の定義を

$$\sum_{\mu\in\Lambda} m_\lambda(\mu)e(\mu)$$

だと思ってもよい．

いま $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の場合では，次の式が成立することは明らかであろう：

$$\mathrm{ch}_\lambda=e(\lambda)+e(\lambda-\alpha)+e(\lambda-2\alpha)+\cdots+e(\lambda-m\alpha)$$

ここに $m=\langle\lambda,\alpha\rangle$ である．

さて (ρ, V) を一般の表現とすれば，完全可約性によって $V=V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$，$\lambda_i\in\Lambda^+$ となるような ρ で閉じている $V(\lambda_1),\cdots,V(\lambda_k)$ が本質的にはただ一通り存在する．

したがって ch_V を次の式で定義することにする：

$$\mathrm{ch}_V=\mathrm{ch}_{\lambda_1}+\cdots+\mathrm{ch}_{\lambda_k}$$

ch_V は V の（または (ρ, V) の）形式指標と呼ばれる．

$\sigma\in\mathcal{W}$ とすれば，σ は ch_{λ_i} をかえないので $\sigma\mathrm{ch}_V=\mathrm{ch}_V$ が成立する．

ch_V は次の補題の意味で (ρ, V) を決定する．

補 題 1. いま $c(\lambda)\in\boldsymbol{Z}$, $\lambda\in\Lambda$ は有限個の λ を除いては 0 であって

$$f=\sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)e(\lambda)$$

はすべての $\sigma\in\mathcal{W}$ について不変であるとする．このとき f は次の形にただ一通りにか

くことができる：

$$f=\sum_i n_i\mathrm{ch}_{\lambda_i}\qquad \text{ここに } n_i\in \boldsymbol{Z},\ \lambda_i\in\Lambda^+$$

［証 明］ f は $\mathcal{W}$ の元で不変であるから f は次の形にかけることは明らかである：

$$f=\sum_{\lambda\in\Lambda^+}c(\lambda)\Bigl(\sum_{\sigma\in\mathcal{W}}e(\sigma\lambda)\Bigr)$$

すべての $\lambda\in\Lambda^+$ について，もし $c(\lambda)\neq 0$ とすれば $\mu\leq\lambda$ となる支配的な μ は有限個しかない．したがって M_f を次のように定義すれば M_f は有限である：

$$M_f=\{\mu\in\Lambda^+\,|\,\mu\leq\lambda \text{ で } c(\lambda)\neq 0 \text{ となる } \lambda\in\Lambda^+ \text{ が存在する}\}$$

$\lambda\in M_f$ なる λ のなかで極大なものを1つとって λ とする．すなわち $\lambda'\in M_f$ とするとき $\lambda\leq\lambda'$ とすれば λ' は λ 自身でなければならない．さてこの λ によって f' を次の式で定義する：

$$f'=f-c(\lambda)\mathrm{ch}_\lambda$$

明らかに f' は $\mathcal{W}$ の元によって不変であり，有限個の $e(\lambda)$ の $\boldsymbol{Z}$ の元を係数とする一次結合によって表されている．さて ch_λ に $e(\mu)$ の形で入っている μ は $\mu\leq\lambda$ となるからすべて M_f に入っている．したがって $M_{f'}\subseteq M_f$ となり $M_{f'}$ の元の個数は M_f の元の個数より少なくとも1つだけ少ない．したがって補題を M_f の元の個数による数学的帰納法によって証明される．もちろん M_f がただ一つの元をもっているときを証明しなければならないが，このとき λ がただ一つの支配的なウェイトであるから

$$\mathrm{ch}_\lambda=\sum_{\sigma\in\mathcal{W}}e(\sigma\lambda)$$

であり，$f=c(\lambda)\mathrm{ch}_\lambda$ となることがわかるから f が求める形で表されることがわかる．ただ一通りであることも M_f についての数学的帰納法から明らかである．■

補 題 2. (ρ_1, V)，(ρ_2, W) が L の表現とするとき，次の式が成立する：

$$\mathrm{ch}_{V\otimes W}=\mathrm{ch}_V\cdot\mathrm{ch}_W$$

［証 明］ まず $V=V(\lambda)$，$W=V(\lambda')$，$\lambda,\lambda'\in\Lambda^+$ の場合に還元できることを証明する．いまこの場合に補題が成立しているものとして $V=V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$，$W=V(\lambda_1')\oplus\cdots\oplus V(\lambda_l'), \lambda_1,\cdots,\lambda_k,\lambda_1',\cdots,\lambda_l'\in\Lambda^+$ とすれば

$$V\otimes W=\sum_{i,j}V(\lambda_i)\otimes V(\lambda_j')$$

となるから，次の計算が上の仮定から成立する：

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_{V\otimes W}&=\sum_{i,j}\mathrm{ch}_{V(\lambda_i)\otimes V(\lambda_j')}=\sum_{i,j}\mathrm{ch}_{\lambda_i}\cdot\mathrm{ch}_{\lambda_j'}\\&=\Bigl(\sum_i\mathrm{ch}_{\lambda_i}\Bigr)\Bigl(\sum_j\mathrm{ch}_{\lambda_j'}\Bigr)=\mathrm{ch}_V\cdot\mathrm{ch}_W\end{aligned}$$

したがって $V=V(\lambda)$, $W=V(\lambda')$, $\lambda,\lambda'\in\Lambda^+$ として補題を証明する．さて V は V_μ の直和，W は $W_{\mu'}$ の直和にかけるから，$V\otimes W$ の任意の元は適当に基底をとることによって次の形で表される：

$$\sum_{i,j}\alpha_{ij}v_i\otimes w_j$$

ここに $v_i\in V_{\mu_i}$, $w_j\in W_{\mu_j'}$ とする．いまこの元が $V\otimes W$ のウェイト $\tilde{\mu}$ のウェイト空間の元であったとすれば，任意の $H\in\mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(H)\sum_{i,j}a_{ij}v_i\otimes w_j &= (\rho_1\otimes\rho_2)(H)\sum_{i,j}a_{ij}v_i\otimes w_j\\ &=\sum_{i,j}a_{ij}((\rho_1(H)v_i)\otimes w_j+v_1\otimes(\rho_2(H)w_j))\\ &=\sum_{i,j}a_{ij}(\mu_i(H)+\mu_j'(H))v_i\otimes w_j\end{aligned}$$

いま $v_i\otimes w_j$ は一次独立であるようにとっているから

$$\tilde{\mu}=\mu_i+\mu_j'$$

となっていることがわかる．逆に $\tilde{\mu}=\mu_i+\mu_j'$ が成立するとすれば $v\in V_{\mu_i}$, $w\in W_{\mu_j'}$ の任意の元 v,w に対して $v\otimes w$ が $\tilde{\mu}$ のウェイト空間の元であることは明らかである．以上によって

$$(V\otimes W)_{\tilde{\mu}}=\sum V_\mu\otimes W_{\mu'}$$

ここに $\sum$ は $\tilde{\mu}=\mu+\mu'$ となる $\mu\in\Pi(\lambda)$, $\mu'\in\Pi(\lambda')$ のすべてにとっての和である．これから明らかに

$$\dim(V\otimes W)_{\tilde{\mu}}=\sum_{\mu+\mu'=\tilde{\mu}}m_V(\mu)m_W(\mu')$$

これから　$\mathrm{ch}_{V\otimes W}=\mathrm{ch}_V\cdot\mathrm{ch}_W$ は明らかである．■

$\lambda\in\Lambda^+$ のときは $\Pi(\lambda)$ は有限集合であるが，一般の λ に対しては $\Pi(\lambda)$ は無限集合になる．しかしこの場合にも ch_λ のようなものを考えたい．このために多少スタイルを変えて次のように考える．

いま $\lambda\in\Lambda$ とすれば，λ は $\mathfrak{h}$ の上の複素線形汎関数である．すなわち $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ となる．

$\lambda\in\Lambda^+$ のとき ch_λ は次の形をしている：

$$\mathrm{ch}_\lambda=\sum_i n_ie(\mu_i)$$

いま $e(\mu)$ に対して次の $\mathfrak{h}^*$ の上の関数 ε_μ を対応させる．

すべての $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して

$$\varepsilon_\mu(\lambda)=\begin{cases}1 & \lambda=\mu \text{ のとき}\\ 0 & \lambda\neq\mu \text{ のとき}\end{cases}$$

この $e(\mu)$ ⟷ ε_μ の対応の上で

$$\sum_i n_i e(\mu_i) \longleftrightarrow \sum_i n_i \varepsilon_{\mu_i}$$

という対応を行えば ch_λ には $\mathfrak{h}^*$ の上の関数が対応することになる．もちろんこの関数は線形ではない．

$\mathfrak{h}^*$ の上のすべての関数は必要がないので，我々の目的に沿うようにもう少し制限することにする．

いま $f:\mathfrak{h}^*\longrightarrow \boldsymbol{C}$ として，f の台（support）を次のものと定義してこれを $\mathrm{supp}\,f$ で表す：

$$\mathrm{supp}\,f=\{\lambda\in\mathfrak{h}^* \mid f(\lambda)\neq 0\}$$

このとき $\mathcal{X}$ は次の条件をみたす f の全体と定義する：

　$\mathrm{supp}\,f$ が $\{\lambda-\sum_{0<\alpha}k_\alpha\alpha \mid k_\alpha$ は負でない整数$\}$ の形の集合の有限和の部分集合になっている．

もちろんここで $\Pi(\lambda)\subseteq\{\lambda-\sum_{0<\alpha}k_\alpha\alpha \mid k_\alpha$ は負でない整数$\}$ になっている．このことから ch_λ に上の対応で対応する関数が $\mathcal{X}$ の元であることは明らかである．

いま $\mathcal{X}$ の2元 f と g とに対して，f と g との積 $f*g$ を次のものと定義する：

$$(f*g)(\lambda)=\sum_{\mu+\nu=\lambda}f(\mu)g(\nu)$$

まずここで $\sum$ は一応無限和の形であるが実際には有限和であることを証明する．必要ならば f と g とを有限個の関数の和に分解すればよいから，f と g とが次の条件をみたすものとする：

$$\mathrm{supp}\,f\subseteq\{\lambda_1-\sum_{0\leq\alpha}k_\alpha\alpha \mid k_\alpha \text{ は負でない整数}\}$$

$$\mathrm{supp}\,g\subseteq\{\lambda_2-\sum_{0\leq\alpha}k_\alpha\alpha \mid k_\alpha \text{ は負でない整数}\}$$

ここで証明したいことは $\mu\in\mathrm{supp}\,f$，$\nu\in\mathrm{supp}\,g$ で $\mu+\nu=\lambda$ となる μ と ν とが有限個しかないことである．ところで $\mu+\nu=\lambda$ で $\mu=\lambda_1-\sum_{0\leq\alpha}k_\alpha\alpha,\ \nu=\lambda_2-\sum_{0\leq\alpha}k_\alpha'\alpha$ は

$$\lambda_1+\lambda_2-\lambda=\sum_{0\leq\alpha}(k_\alpha+k_\alpha')\alpha$$

となるから，そのような k_α, k_α' の可能性が有限個しかないことは明らかである．さらにこの場合この議論から

$$\mathrm{supp}(f*g) \subseteq \{\lambda_1+\lambda_2-\sum_{0\le\alpha} k_\alpha\alpha \mid k_\alpha \text{ は負でない整数}\}$$

となるから $f*g \in \mathfrak{X}$ であることもわかる.

$f*g=g*f$ は明らかであるが，さらに

$$((f*g)*\mathfrak{h})(\lambda) = \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=\lambda} f(\mu_1)g(\mu_2)\mathfrak{h}(\mu_3) = (f*(g*\mathfrak{h}))(\lambda)$$

から $(f*g)*h=f*(g*h)$ がでてくる．もちろん

$$f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$$

も明らかである.

さて $(\sum_i n_i e(\mu_i))\cdot(\sum_j m_j e(\mu_j')) = \sum_{i,j} n_i m_j e(\mu_i+\mu_j')$ に対応する関数を考えれば

$$\sum_i n_i e(\mu_i) \longleftrightarrow \sum_i n_i \varepsilon_{\mu_i}$$

$$\sum_j m_j e(\mu_j') \longleftrightarrow \sum_j m_j \varepsilon_{\mu_j'}$$

$$\sum_{i,j} n_i m_j e(\mu_i+\mu_j') \longleftrightarrow \sum_{i,j} n_i m_j \varepsilon_{\mu_i+\mu_j'}$$

であるが

$$(\varepsilon_{\mu_i}*\varepsilon_{\mu_j'})(\lambda) = \sum_{\mu+\nu=\lambda} \varepsilon_{\mu_i}(\mu)\varepsilon_{\mu_j'}(\nu) = \begin{cases} 1 & (\mu_i+\mu_j'=\lambda) \\ 0 & (\mu_i+\mu_j'\neq\lambda) \end{cases}$$

であるから $\varepsilon_{\mu_i}*\varepsilon_{\mu_j'}=\varepsilon_{\mu_i+\mu_j'}$ がわかるから，$*$ はちょうど以前の・に対応していることがわかる．もちろん和は以前の和に対応している.

$\sigma\in\mathcal{W}$, $f\in\mathfrak{X}$ とするとき σf を

$$(\sigma f)(\lambda)=f(\sigma^{-1}\lambda)$$

によって定義する．σf は $\mathfrak{X}$ の元とは限らない．次の式が成立する：

$$(\sigma(\varepsilon_\lambda))(\mu) = \varepsilon_\lambda(\sigma^{-1}\mu) = \begin{cases} 1 & (\lambda=\sigma^{-1}\mu \text{ すなわち } \sigma\lambda=\mu \text{ のとき}) \\ 0 & (\sigma\lambda\neq\mu \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= \varepsilon_{\sigma\lambda}(\mu)$$

したがって $\sigma(\varepsilon_\lambda)=\varepsilon_{\sigma\lambda}$ となっている.

さて Kostant の関数 p と Weyl の関数 q とを定義することにする.

$p(\lambda)$ は $-\lambda=\sum_{0\le\alpha} k_\alpha\alpha$ と $-\lambda$ を負でない整数 k_α で表す表し方の個数と定義する．もちろん $-\lambda$ がこの形に表せないときは $p(\lambda)=0$ とおくのである．いま Φ^+ の元の順序を 1 つ固定して $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ とすれば $Z(\lambda)$ を §12 で定義されたものとすれば $Z(0)$ の基底は $y_{\alpha_1}{}^{k_1}\cdots y_{\alpha_m}{}^{k_m}v^+$ と v^+ となるから $p(\lambda)$ は $Z(0)_{-\lambda}$ の次元になっている．すなわ

ち p は $\mathrm{ch}_{Z(0)}$ に対応する $\mathfrak{X}$ の元であることがわかる.

次に Weyl の関数 q を次の式で定義する：

$$q = \prod_{0<\alpha}(\varepsilon_{\alpha/2} - \varepsilon_{-\alpha/2})$$

ここで Π は $*$ による積を表す. すなわち右辺のカッコのなかを q_α で表し, Φ^+ に属する α を並べたものを $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ とすれば $q = q_{\alpha_1} * q_{\alpha_2} * \cdots * q_{\alpha_m}$ になっている. これから $q \in \mathfrak{X}$ も明らかである.

さらにもう1つ f_α という関数をすべての $\alpha \in \Phi^+$ に対して導入する. これは次の式で与えられる：

k が負でない整数ならば　$f_\alpha(-k\alpha) = 1$

上の形以外の λ に対しては　$f_\alpha(\lambda) = 0$

実質的には $f_\alpha = \varepsilon_0 + \varepsilon_{-\alpha} + \varepsilon_{-2\alpha} + \cdots$ と思えばよい. これから $f_\alpha \in \mathfrak{X}$ は明らかである.

補題3.　次の式が成立する：

(i)　$$p = \prod_{0<\alpha} f_\alpha$$

(ii)　$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * f_\alpha = \varepsilon_0$$

(iii)　$$q = \varepsilon_\delta * \prod_{0<\alpha}(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha})$$

[証明]　(i)　$p(\lambda)$ が $-\lambda = \sum_{0<\alpha} k_\alpha \alpha$ (k_α は負でない整数) と $-\lambda$ を表す表し方の数であるから, $*$ と f_α の定義より明らか.

(ii)
$$\begin{aligned}&(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * (\varepsilon_0 + \varepsilon_{-\alpha} + \varepsilon_{-2\alpha} + \cdots)\\ &\quad = \varepsilon_0 + \varepsilon_{-\alpha} + \varepsilon_{-2\alpha} + \cdots - \varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{-2\alpha} - \varepsilon_{-3\alpha} - \cdots = \varepsilon_0\end{aligned}$$

(iii)　$\delta = \sum_{0<\alpha} \frac{1}{2}\alpha$ であるから $\varepsilon_\delta = \prod_{0<\alpha} \varepsilon_{\alpha/2}$ したがって

$$\varepsilon_\delta * \prod_{0<\alpha}(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) = \prod_{0<\alpha} \varepsilon_{\alpha/2} * (\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) = \prod_{0<\alpha}(\varepsilon_{\alpha/2} - \varepsilon_{-\alpha/2})$$ ■

補題4.　前と同じく $\sigma \in \mathcal{W}$ に対して $l(\sigma)$ を $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}$ ($\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \Delta$) と表せる最小の k と定義すれば, 次の式が成立する：

$$\sigma q = (-1)^{l(\sigma)} q$$

[証明]　$\sigma = \sigma_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) のときに証明すれば十分である. この場合には $l(\sigma) = 1$ となっている. ところで σ は α 以外の正のルートの全体を不変にして, α を $-\alpha$ にかえるから明らかに $\sigma q = -q$ となる. ■

補題5.　次の式が成立する：

$$q * p * \varepsilon_{-\delta} = \varepsilon_0$$

［証 明］ 補題3の（i），（ii），（iii）から次の計算が成立する．

$$q * p * \varepsilon_{-\delta} = \prod_{0<\alpha} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * \varepsilon_\delta * p * \varepsilon_{-\delta}$$
$$= \prod_{0<\alpha} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * p = \prod_{0<\alpha} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * f_\alpha = \varepsilon_0 \quad ■$$

補 題 6. f を $\mathrm{ch}_{Z(\lambda)}$ に対応する $\mathfrak{X}$ の元とすれば

$$f(\mu) = p(\mu - \lambda) = (p * \varepsilon_\lambda)(\mu)$$

［証 明］ Φ^+ の元の順序を1つ定めて $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ とすれば $Z(\lambda)$ の基底は v^+と $y_{\alpha_1}{}^{k_1} \cdots y_{\alpha_m}{}^{k_m} v^+$ とになっている．したがって $Z(\lambda)_\mu$ の次元は $\mu = \lambda - \sum_i k_i\alpha_i$ と表す表し方の個数になっている．すなわち $p(\mu - \lambda)$ となる．一方次の計算が成立するから明らか：

$$(p * \varepsilon_\lambda)(\mu) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} p(\mu_1) \cdot \varepsilon_\lambda(\mu_2)$$
$$= \sum_{\lambda+\mu_1=\mu} p(\mu_1) = p(\mu - \lambda) \quad ■$$

補 題 7. f を $\mathrm{ch}_{Z(\lambda)}$ に対応する $\mathfrak{X}$ の関数とすれば，

$$q * f = \varepsilon_{\lambda+\delta}$$

［証 明］ 前補題により $q * f = q * p * \varepsilon_\lambda = \varepsilon_\delta * \varepsilon_\lambda = \varepsilon_{\lambda+\delta}$. ■

L の包絡代数 $\mathcal{U}$ の Casimir 元を C とする．すなわち前節の記号で C は次の式で表される：

$$C = \sum_{i=1}^{l} H_i K_i + \sum_{\alpha\in\Phi} X_\alpha Z_\alpha$$

前節で証明したように C は $\mathcal{U}$ のすべての元と可換になっている．したがって C はすべての巡回表現の上でスカラーになっている．

いま $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ として λ を最高のウェイトとする v^+ を原始ベクトルとして生成される巡回表現の上で C がどのようなスカラーを表すか調べることにする．

もし $\alpha < 0$ とするならば $Z_\alpha \cdot v^+ = 0$ となる．一方 $\alpha > 0$ とすれば $X_\alpha \cdot v^+ = 0$ であるから

$$X_\alpha Z_\alpha v^+ = Z_\alpha X_\alpha \cdot v^+ + T_\alpha \cdot v^+ = T_\alpha \cdot v^+ = (\lambda, \alpha) v^+$$

となる．一方 Freudenthal の公式の証明のところで証明したように次の式が成立する：

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda(H_i)\lambda(K_i) = (\lambda, \lambda)$$

この2つに $2\delta = \sum_{0<\alpha} \alpha$ を用いれば C が次のスカラーになることがわかる：

$$(\lambda,\lambda)+\sum_{0<\alpha}(\lambda,\alpha)=(\lambda,\lambda)+2(\lambda,\delta)=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)$$

以下に §12 で作られた $Z(\lambda)$ を用いることにする.

補題 8. $\lambda\in\Lambda$ とする. このとき次の形の $I_i(0\leq i\leq m)$ が存在する：

$$0=I_0\subset I_1\subset I_2\subset\cdots\subset I_m=Z(\lambda)$$

I_i は I_{i+1} のイデアルであって I_{i+1}/I_i は $V(\mu)$ の形であって μ は $\mu\leq\lambda$ で次の条件をみたすものとする：

$$(\mu+\delta,\mu+\delta)=(\lambda+\delta,\lambda+\delta) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (1)$$

［証明］（1）をみたす $\mathcal{E}$ の元 μ は有界な閉集合であり, $Z(\lambda)$ のウェイト μ は Λ の元であるから, $Z(\lambda)$ のウェイト μ で（1）をみたすものは有限個しかない. $(Z(\lambda))_\mu$ ($Z(\lambda)$ の μ によるウェイト空間）は有限次元であるから次の式で定義される d は自然数である：

$$d=\sum\dim(Z(\lambda))_\mu \qquad \text{ここに } \mu \text{ は } \mu\leq\lambda \text{ で（1）をみたす } \Lambda \text{ の元}$$

d についての帰納法で補題を証明する.

まず $d=1$ とする. このとき $Z(\lambda)$ が既約であることをいう. いま $Z(\lambda)$ で作られる L の表現を $(\rho,Z(\lambda))$ とする. ρ で閉じた 0 でない $Z(\lambda)$ の真部分空間が存在したとしてそれを W とする. §12 の定理 2 によって W はウェイト空間の直和になっている. したがって W は $\mu<\lambda$ となるある μ を最高のウェイトとするベクトルをもっている. したがって補題 8 の直前の計算によって C はこの原始ベクトルに対してはスカラーであり, その値は $(\mu+\delta,\mu+\delta)-(\delta,\delta)$ になっている. 一方 $Z(\lambda)$ では C は $(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)$ になっているから μ は（1）を満足し,（1）を満足するものが λ と μ と少なくとも 2 つ存在するから矛盾する. すなわち $Z(\lambda)$ は既約になる. すなわち $Z(\lambda)$ は $V(\lambda)$ になるから補題が成立することは明らかである.

次に $d>1$ とする. $Z(\lambda)$ が既約ならばもちろん明らかだから $Z(\lambda)$ は既約でないとする. $Z(\lambda)$ による表現を $(\rho,Z(\lambda))$ とすれば, $Z(\lambda)$ の 0 でない真部分空間 W で ρ で閉じているものがある. W はもちろんある（1）をみたす $\mu\leq\lambda$ を最高のウェイトとする巡回表現としてよい. $Z(\lambda)/W$ はやはり巡回表現であり, 帰納法の仮定を $Z(\lambda)/W$ と W に用いれば補題が証明される. ■

さて $\mathrm{ch}_{V(\lambda)}$ を ch_λ とかき, $\mathrm{ch}_{Z(\lambda)}$ を ch_λ' とかくことにする. $\lambda\in\Lambda^+$ を 1 つ固定すれば,（1）をみたす $\mu\in\Lambda$ は有限個しかない. これを全部並べて $\mu_1,\cdots,\mu_k$ とする. ここ

に $\mu_i < \mu_j$ ならば $i<j$ となっているように並べてあるものとする．

補題8によって次の式が成立する：

$$\mathrm{ch}_{\mu_j}' = \sum_{i\le j} a_{ij}\mathrm{ch}_{\mu_i}$$

ここに $a_{ij}\in \boldsymbol{Z}$ で $0\le a_{ij}$ であり $a_{jj}=1$ となる．いま $i>j$ のとき $a_{ij}=0$ とおけば行列 (a_{ij}) は対角線が1でその下が0となる自然数の行列になるから，整数を行列とする逆行列が存在する．したがって ch_{μ_j} は $\mathrm{ch}_{\mu_i}'(i\le j)$ の整数を係数とする一次結合で表すことができる．したがって

$$\mathrm{ch}_\lambda = \sum c(\mu)\mathrm{ch}_\mu' \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

となる．ここに $\sum$ は（1）をみたす $\mu\le\lambda$ なる $\mu\in\Lambda$ を走るものとし，$c(\lambda)=1$ とする．

さて §12 の定理7によって $\sigma\in\mathcal{W}$ は ch_λ を不変にする．

今後 $(-1)^{l(\sigma)}$ を $\mathrm{sn}(\sigma)$ とかくことにすれば補題4は次の形にかくことができる：

$$\sigma q = \mathrm{sn}(\sigma) q$$

この上で次の補題を証明する．

補題9.　次の式が成立する：

$$q * \mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$$

［証明］　まず（2）の式から次の式が得られる：

$$\begin{aligned} q*\mathrm{ch}_\lambda &= \sum c(\mu) q*\mathrm{ch}_\mu' \qquad (\textstyle\sum \text{ は（2）のときと同じ}) \\ &= \sum c(\mu)\varepsilon_{\mu+\delta} \end{aligned}$$

いま $\sigma\in\mathcal{W}$ とすれば，補題4と上にのべた $\mathrm{sn}(\sigma)$ の定義から次の式が得られる：

$$\mathrm{sn}(\sigma) q*\mathrm{ch}_\lambda = \sum c(\mu)\varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$$

この式から $\{\mu+\delta \mid c(\mu)\neq 0\}$ なる集合が $\mathcal{W}$ で不変であることがわかる．さらに $c(\lambda)=1$ を用いて $\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$ の形の項を揃えれば次の形になっていることがわかる：

$$q*\mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)} + S$$

証明したいことは $S=0$ である．

もし S に0でない項があるとすれば，§9 の定理3によって Λ の元は $\sigma\in\mathcal{W}$ を施せば Λ^+ の元になるから $\mu<\lambda$ で $\mu+\delta\in\Lambda^+$ で μ が（1）をみたすものが存在する．ところでここで §12 の補題2の証明を用いれば $\mu=\lambda$ がでてきて矛盾する．■

定理1.　(Kostant の公式)　$\lambda\in\Lambda^+$ とすれば $m_\lambda(\mu)$ は次の式で与えられる：

$$m_\lambda(\mu) = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) p(\mu + \delta - \sigma(\lambda + \delta))$$

［証 明］ 補題5によって $\varepsilon_0 = q * p * \varepsilon_{-\delta}$ であるから補題9から次の式が成立する：

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_\lambda &= p * \varepsilon_{-\delta} * \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)} \\ &= p * \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)-\delta} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) \ p * \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)-\delta} \end{aligned}$$

さて $\tau + (\sigma(\lambda + \delta) - \delta) = \mu$ となる τ は $\mu + \delta - \sigma(\lambda + \delta)$ であるから，これから

$$m_\lambda(\mu) = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) p(\mu + \delta - \sigma(\lambda + \delta))$$

がでて証明が終った． ■

Weyl の公式を証明するためにまず次の補題を証明する．

補 題 10.

$$q = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma\delta}$$

［証 明］ 補題 9 で $\lambda = 0$ とおけば $\mathrm{ch}_\lambda = \varepsilon_0$ となるから補題が直ちに得られる． ■

定 理 2. (Weyl の公式)　　$\lambda \in \Lambda^+$ とすれば，次の式が成立する：

$$\Big(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma\delta}\Big) * \mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$$

［証 明］ 補題 10 と補題9から次の計算で直ちに証明される：

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma\delta}\Big) * \mathrm{ch}_\lambda &= q * \mathrm{ch}_\lambda \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma) \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)} \end{aligned}$$ ■

Weyl の公式を用いて Weyl の次元公式を証明するためにまずいくつかの定義をすることにする．まず我々の目的は $\lambda \in \Lambda^+$ として $\dim V(\lambda)$ を計算することである．ここでは $\deg(\lambda) = \dim V(\lambda)$ とおくことにする．

さて $V(\lambda)$ はそのウェイト空間の直和であるから

$$\deg(\lambda) = \sum_{\mu \in \Pi(\lambda)} m_\lambda(\mu)$$

が成立する．この右辺は $\sum_{\mu} m(\mu) e(\mu)$ の係数の和であるから ch_λ の値の総和となっている．いま $\mathfrak{X}_0$ を

$$f = c_1 \varepsilon_{\lambda_1} + \cdots + c_n \varepsilon_{\lambda_n} \qquad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda,\ c_1, \cdots, c_n \in C)$$

なる形の関数の全体として $f \in \mathfrak{X}_0$ に対して $v(f)$ を

$$v(f) = c_1 + \cdots + c_n$$

によって定義する．

このとき明らかに

$$v((\sum_i a_i\varepsilon_{\mu_i}) * (\sum_j b_j\varepsilon_{\nu_j})) = v(\sum_{i,j} a_ib_j\varepsilon_{\mu_i+\nu_j})$$
$$= \sum_{i,j} a_ib_j = (\sum_i a_i)(\sum_j b_j)$$
$$= v(\sum_i a_i\varepsilon_{\mu_i})\cdot v(\sum_j b_j\varepsilon_{\nu_j})$$

となるから一般に次の式が成立する：

$$v(f*g) = v(f)\cdot v(g)$$

次に $\alpha \in \Phi$ として ∂_α を

$$\partial_\alpha\varepsilon_\lambda = (\lambda, \alpha)\varepsilon_\lambda$$

によって定義する．線形に拡大することによって

$$\partial_\alpha: \quad \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathcal{X}_0$$

となる線形写像と考えてよい．明らかに

$$\partial_\alpha(\varepsilon_\mu * \varepsilon_\nu) = (\mu+\nu, \alpha)\varepsilon_{\mu+\nu} = (\mu, \alpha)\varepsilon_{\mu+\nu} + (\nu, \alpha)\varepsilon_{\mu+\nu}$$
$$= (\partial_\alpha\varepsilon_\mu) * \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu * (\partial_\alpha\varepsilon_\nu)$$

となっているから ∂_α は微分になっている．さらに

$$\partial = \prod_{0<\alpha} \partial_\alpha$$

によって ∂ を定義する．

さて $\omega(\lambda+\delta)$ を次の式で定義する：

$$\omega(\lambda+\delta) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$$

したがって Weyl の公式は次の式で表される：

$$\omega(\delta) * \mathrm{ch}_\lambda = \omega(\lambda+\delta)$$

ここで $\omega(\delta)$ は q に等しく，したがって補題 3 より

$$\omega(\delta) = \varepsilon_\delta * \prod_{0<\alpha} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha})$$

となっている．いま Weyl の公式より

$$v(\partial\omega(\lambda+\delta)) = v(\partial(\omega(\delta) * \mathrm{ch}_\lambda))$$

となっている．いま $\partial = \prod_{0<\alpha} \partial_\alpha$ の ∂_α は微分であるから $\omega(\delta)$ と ch_λ のいずれかに施されて，それの和をとるのであるが，もしそのうち 1 つでも ch_λ の方に施されたとすると

$$\varepsilon_\delta * \prod_{0<\alpha} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha})$$

のうちの $(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})$ の項でどの ∂_β も施されないものがでてくる．この場合には

$$v(t*(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha}))=v(t)\cdot v(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})=0$$

となって消えてしまう．したがって，上の式は

$$v(\mathrm{ch}_\lambda)\cdot v(\partial\omega(\delta))=v(\partial\omega(\lambda+\delta))$$

となり，求める $\deg(\lambda)=v(\mathrm{ch}_\lambda)$ は $v(\partial\omega(\delta))$ と $v(\partial\omega(\lambda+\delta))$ を計算すれば求められる．

まず明らかに次の式が成立する：

$$\partial\varepsilon_\delta=\prod_{0<\alpha}(\delta,\alpha)\varepsilon_\delta$$

これから明らかに $v(\partial\varepsilon_\delta)=\prod_{0<\alpha}(\delta,\alpha)$ がでてくる．同様にして次の式が成立する：

$$v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta})=\prod_{0<\alpha}(\sigma\delta,\alpha)=\prod_{0<\alpha}(\delta,\sigma^{-1}\alpha)$$

ところで §7 の定理 5 によって σ^{-1} によって負のルートに移される正のルートの数は $l(\sigma^{-1})=l(\sigma)$ であるから

$$v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta})=\mathfrak{sn}(\sigma)\prod_{0<\alpha}(\delta,\alpha)$$

となる．したがって次の式が成立する：

$$\begin{aligned}v(\partial\omega(\delta))&=\sum_{\sigma\in\mathcal{W}}\mathfrak{sn}(\sigma)v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta})\\&=\sum_{\sigma\in\mathcal{W}}(\mathfrak{sn}(\sigma))^2\prod_{0<\alpha}(\delta,\alpha)\\&=|\mathcal{W}|\prod_{0<\alpha}(\delta,\alpha)\end{aligned}$$

ここで $|\mathcal{W}|$ は $\mathcal{W}$ の元の個数を表すものとする．同様にして次の式が得られる：

$$v(\partial\omega(\lambda+\delta))=|\mathcal{W}|\prod_{0<\alpha}(\lambda+\delta,\alpha)$$

これから $\deg(\lambda)$ が計算されて次の定理を得る．

定理 3.　(Weyl の次元公式)　$\lambda\in\Lambda^+$ とすれば次の式が成立する：

$$\deg(\lambda)=\frac{\prod_{0<\alpha}(\lambda+\delta,\alpha)}{\prod_{0<\alpha}(\delta,\alpha)}=\frac{\prod_{0<\alpha}\langle\lambda+\delta,\alpha\rangle}{\prod_{0<\alpha}\langle\delta,\alpha\rangle}$$

Kostant の公式と Weyl の公式から Steinberg の公式を導くことにする．

Steinberg の公式は $\lambda',\lambda''\in\Lambda^+$ とするとき，$V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ は完全可約性によって $V(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+)$ の形の直和になっているわけであるが，$V(\lambda)$ が $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ のなかに直和因子として入っている数を $n(\lambda)$ として $n(\lambda)$ を計算する公式である．

補題2によって次の式が得られる：

$$\mathrm{ch}_{\lambda'} * \mathrm{ch}_{\lambda''} = \sum_{\lambda} n(\lambda)\mathrm{ch}_{\lambda}$$

前と同じく $\mu \in \Lambda^+$ のとき $\sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$ を $\omega(\mu+\delta)$ で表すことにする．

上の式に $\omega(\delta)$ を掛けて定理2を用いれば

$$\mathrm{ch}_{\lambda'} * \omega(\lambda''+\delta) = \sum_{\lambda} n(\lambda)\omega(\lambda+\delta)$$

が得られる．さて $\mathrm{ch}_{\lambda'} = \sum_{\mu} m_{\lambda'}(\mu)\varepsilon_{\mu}$ であるから，この中の $m_{\lambda'}(\mu)$ を Kostant の公式を用いてかき直せば次の式が得られる：

$$\sum_{\mu}\sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma)p(\mu+\delta-\sigma(\lambda'+\delta))\varepsilon_{\mu} * \omega(\lambda''+\delta) = \sum_{\lambda} n(\lambda)\omega(\lambda+\delta)$$

さらにこの中の $\omega(\lambda''+\delta)$ を定義によって元の式に戻せば

$$\sum_{\mu}\sum_{\sigma\in\mathcal{W}}\sum_{\tau\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma\tau)p(\mu+\delta-\sigma(\lambda'+\delta))\varepsilon_{\tau(\lambda''+\delta)+\mu}$$

$$= \sum_{\lambda}\sum_{\sigma\in\mathcal{W}} n(\lambda)\mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)\sigma}$$

が得られる．=の右辺の $\sigma(\lambda+\delta)=\nu+\delta$ とおいて λ を ν でかき直し，=の左辺では $\tau(\lambda''+\delta)+\mu=\nu+\delta$ と μ を ν でかき直せば次の式が得られる：

$$\sum_{\nu}\sum_{\sigma\in\mathcal{W}}\sum_{\tau\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma\tau)p(\nu+2\delta-\sigma(\lambda'+\delta)-\tau(\lambda''+\delta))\varepsilon_{\nu+\delta}$$

$$= \sum_{\nu}\sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma)n(\sigma(\nu+\delta)-\delta)\varepsilon_{\nu+\delta}$$

さて ν を支配的とする，$\sigma(\nu+\delta)-\delta$ は $\sigma=1$ のとき支配的である．いま $\sigma\neq 1$ のときは支配的にならないことをいう．もし $\sigma(\nu+\delta)-\delta$ が支配的とすれば δ は，狭義に支配的であるから $\sigma(\nu+\delta)$ は，狭義に支配的になる．一方 $\nu+\delta$ も狭義に支配的であるから §9 の定理1によって $\sigma=1$ でなければならない．

これから $\sigma\neq 1$ のときは $n(\sigma(\nu+\delta)-\delta)=0$ となることがわかる．すなわち上の式の右辺の $\varepsilon_{\nu+\delta}$ の係数は $n(\nu)$ であることがわかる．左辺を眺めて次の定理を得る．

定理 4. (Steinberg の公式) $\lambda', \lambda'', \lambda \in \Lambda^+$ として $V(\lambda)$ が $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ に入っている数は次の式で表される：

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{W}}\sum_{\tau\in\mathcal{W}} \mathrm{sn}(\sigma\tau)p(\lambda+2\delta-\sigma(\lambda'+\delta)-\tau(\lambda''+\delta))$$

4 具体的な表現

§ 15. テンソル積による既約表現

この節でも L は複素半単純線形リー代数とする．いま L の基本的な整ウェイトを $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ とし，

$$\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l \qquad (m_1, \cdots, m_l \geq 0)$$

とする．このとき λ を最高のウェイトとする既約表現を前とは別の形で求めることにする．まず次の補題を証明する．

補題 1. (ρ, W) を L の表現，w_0 をその原始ベクトルで λ をそのウェイトとする．このとき W_0 を w_0 を含む最小の ρ-不変な部分空間とすれば，ρ を W_0 の上に制限した表現 (ρ, W_0) は既約表現である．

［証明］ いま $\mathcal{U}$ を L の包絡代数とする．このとき

$$W_0 = \mathcal{U}\cdot w_0$$

が成立する．いま次の式を証明する：

$$(W_0)_\lambda = \boldsymbol{C}\cdot w_0$$

いま $a \in \mathcal{U}$ とすれば，a は次の形になっている：

$$a = \sum x_{-\alpha}{}^{r_1}\cdots x_{-\alpha_N}{}^{r_N}\, x_{\alpha_1}{}^{s_1}\cdots x_{\alpha_N}{}^{s_N}\, p_{r,s}(\mathfrak{h})$$

ここに $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ は正のルートの全体として，$r_1, \cdots, r_N, s_1, \cdots, s_N \geq 0$ であり，$r = (r_1, \cdots, r_N), s = (s_1, \cdots, s_N)$，$p_{r,s}(\mathfrak{h})$ は $h_{\alpha_1}, \cdots, h_{\alpha_N}$ の多項式を表す．これから直ちに次の式が得られる：

$$a\cdot w_0 = \sum p_{r,0}(\lambda(\mathfrak{h}))x_{-\alpha_1}{}^{r_1}\cdots x_{-\alpha_N}{}^{r_N}\cdot w_0$$

ここに $\lambda(\mathfrak{h})$ は $\lambda(h_{\alpha_1}), \cdots, \lambda(h_{\alpha_N})$ を表す．ところで

$$x_{-\alpha_1}{}^{r}\cdots x_{-\alpha_N}{}^{r_N}\cdot w_0 \in (W_0)_{\lambda - r_1\alpha_1 - \cdots - r_N\alpha_N}$$

となるから，$a\cdot w_0 \in (W_0)_\lambda$ であることから

$$a\cdot w_0 = p_{0,0}(\lambda)w_0$$

となり $p_{0,0}(\lambda)\in C$ であるから $(W_0)_\lambda = C\cdot w_0$ が証明された．

さて，もし (ρ, W_0) が既約でないとすれば，L が複素半単純であることから

$$W_0 = W_{01}\oplus W_{02}\oplus\cdots\oplus W_{0m}$$

で W_{0i} はすべて ρ-不変であるような直和分解が成立する．いま，この分解によって w_0 が

$$w_0 = w_{01} + w_{02} + \cdots + w_{0m}$$

と分解されたとする．このとき $w_0 \in (W_0)_\lambda$ であるから

$$\lambda(h)w_{01} + \lambda(h)w_{02} + \cdots + \lambda(h)w_{0m} = \lambda(h)w_0 = h\cdot w_0 = h\cdot w_{01} + h\cdot w_{02} + \cdots + h\cdot w_{0m}$$

から $w_{0i}\in Cw_0$ であることがわかる．

ところで (ρ, W_0) は (λ, w_0)－巡回表現であるから $w_{0i}\in C\cdot w_0$ から $\mathcal{U}\cdot w_{0i} = W_{0j}$ は実は W_0 全体になっている．すなわち $W_0 = W_{0j}$ すなわち W_0 は既約である． ■

さて，いま $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ を L の基本的整ウェイトとして $\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ とする．さらに λ_i を最高のウェイトとする，L の既約表現を (ρ_i, V_i) とする（これを基本的既約表現という．）．

いま W を次のテンソル積で定義する：

$$W = \underbrace{V_1\otimes\cdots\otimes V_1}_{m_1}\otimes\cdots\otimes\underbrace{V_l\otimes\cdots\otimes V_l}_{m_l}$$

同様に ρ を次のテンソル積で定義する：

$$\rho = \underbrace{\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_1}_{m_1}\otimes\cdots\otimes\underbrace{\rho_l\otimes\cdots\otimes\rho_l}_{m_l}$$

いまさらに (ρ_i, V_i) の原始ベクトルを v_i として

$$w_0 = \underbrace{v_1\otimes\cdots\otimes v_1}_{m_1}\otimes\cdots\otimes\underbrace{v_l\otimes\cdots\otimes v_l}_{m_l}$$

と定義して W_0 を w_0 を含む最小の ρ- 不変な部分空間とする．このとき次の定理が成立する．

定理 1. ρ を W_0 に制限してできる表現 (ρ, W_0) は λ を最高のウェイトとする既約表現である．

［証明］ $H\in\mathfrak{h}$ に対して

$$\rho(H)w_0 = (m_1\lambda_1(H) + \cdots + m_l\lambda_l(H))w_0 = \lambda(H)w_0$$

は表現のテンソル積の定義から直ちにでてくる．また w_0 が W での原始ベクトルであることも明らかである．したがって補題から (ρ, W_0) が既約表現であることは明らかである．■

この定理によって $\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ を最高のウェイトとする既約表現を調べるためには，基本的整ウェイトを最高のウェイトとする既約表現すなわち基本的既約表現をよく調べておけばよいことがわかる．次節から個々の場合に分けてこの基本的な表現について調べることにする．

さて $\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ として，λ を最高のウェイトとする既約表現の次元 N を調べることにする．Weyl の定理により N は次の式で表される：

$$N = \prod_{0<\alpha} \frac{(\lambda + \delta, \alpha)}{(\delta, \alpha)}$$

さて §9 の補題3によって $\delta = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ であるから，上の式の計算には次の式を計算すればよい：

$$\prod_{0<\alpha} \frac{((m_1+1)\lambda_1 + \cdots + (m_l+1)\lambda_l, \alpha)}{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_l, \alpha)}$$

いま $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ をルートの基本系とすれば，正のルート α は

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l \qquad (k_1, \cdots, k_l \geq 0)$$

となる．したがって (λ_i, α_j) の計算をすればよい．これには次の式が成立する：

$$\begin{aligned}(\lambda_i, \alpha_j) &= \frac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}(\alpha_j, \alpha_j) = \langle \lambda_i, \alpha_j \rangle (\alpha_j, \alpha_j) \\ &= \delta_{ij}(\alpha_j, \alpha_j)\end{aligned}$$

したがって次の式が成立する：

$$\Big(\sum_i (m_i+1)\lambda_i,\ \sum_j k_j\alpha_j\Big) = \sum_{i=1}^{l} (m_i+1)k_i(\alpha_i, \alpha_i)$$

$$\Big(\sum_i \lambda_i,\ \sum_j k_j\alpha_j\Big) = \sum_{i=1}^{l} k_i(\alpha_i, \alpha_i)$$

以上を総合して次の公式が得られた：

$$N = \prod_k \frac{\sum_{i=1}^{l} (m_i+1)k_i(\alpha_i, \alpha_i)}{\sum_{i=1}^{l} k_i(\alpha_i, \alpha_i)}$$

ここに k は $k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l$ が正のルートとなるような $k_1, \cdots, k_l$ のすべての組を走るものとする．

さてこの公式を $\mathfrak{sl}(l+1, C)$ の場合に用いることにする．$\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ とおけば，k は

$$k_1 = \cdots = k_{i-1} = 0, \qquad k_i = \cdots = k_j = 1, \qquad k_{j+1} = \cdots = k_l = 0$$

が全部となる．すなわち上の式は次の形になっている：

$$N = \prod_{1 \leq i \leq j \leq l} \frac{\sum_{k=i}^{j} (m_k + 1)}{j - i + 1}$$

ここでたとえば $l = 3$ とおけば，$j - i + 1$ が 1 の場合，2 の場合，3 の場合と分ければ

1 の場合 $\qquad (m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_3 + 1)$

2 の場合 $\qquad \dfrac{(m_1 + m_2 + 2)(m_2 + m_3 + 2)}{4}$

3 の場合 $\qquad \dfrac{(m_1 + m_2 + m_3 + 3)}{3}$

となって，結果として次の形を得る：

$$N = \frac{1}{12}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_3 + 1)(m_1 + m_2 + 2)(m_2 + m_3 + 2) \times (m_1 + m_2 + m_3 + 3)$$

§ 16. $\mathfrak{sl}(n, C)$ の基本的既約表現

L をこの節では $\mathfrak{sl}(n, C)$ とする．もちろん $n = l + 1$ とおいて $H_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1}$ とする．$\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$ は前と同じ定義であって，$\alpha_i = \Lambda_i - \Lambda_{i+1}$ で $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ となっている．Weyl 群 $\mathcal{W}$ は $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$ の置換群 $\mathfrak{S}_n$ になっている．

$\mathfrak{sl}(n, C)$ の基本的整ウェイトを $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ とすれば，λ_i は次の式によって定義される：

$$\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$$

したがって次の式が成立する：

$$\lambda_r = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_r$$

証明には $\Lambda_i(H_i) = 1$ と $\Lambda_i(H_{i-1}) = -1$ を用いればよい．

さて C^n を V とかけば，$\mathfrak{sl}(n, C)$ は V から V への線形写像の集合であるから，このそれ自身を表す表現を ρ とかく．すなわち (ρ, V) はきちんと定義すれば，$A \in \mathfrak{sl}(n,$

C) で $v\in V$ としたときに，$\rho(A)v=Av$ によって定義されるものである．この ρ のことを恒等表現という．

さて λ_r に対する既約表現を構成することにする．まず V の r 個のテンソル積 $V\otimes\cdots\otimes V$ を作って，V_r を $V\otimes\cdots\otimes V$ のなかの階数 r の交代テンソルの全体とする．もっと詳しくいえば

$$[v_1,\cdots,v_r]=\sum_P \pm v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes\cdots\otimes v_{i_r}$$

とかいて，ここで $\sum$ はすべての $(1,2,\cdots,r)$ の置換

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$$

についての和であり，$\pm$ は P が偶置換のときは $+$，奇置換のときは $-$ とおくものである．このとき V_r は $[v_1,\cdots,v_r]$ の形の $V\otimes\cdots\otimes V$ の元から生成されるベクトル空間になっている．

いま $u_1,\cdots,u_n$ を V の基底すなわち

$$u_i=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}\leftarrow i\text{ 番目}$$

とすれば，$\begin{pmatrix} n\\ r\end{pmatrix}$ 個のベクトル

$$[u_{j_1},u_{j_2},\cdots,u_{j_r}]\qquad (1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n)$$

の全体が V_r 基底になっている．

いま $A\in\mathfrak{sl}(n,C)$ とすれば $\tilde{\rho}=\rho\otimes\cdots\otimes\rho$ とすれば

$$\tilde{\rho}(A)[v_1,\cdots,v_r]=[Av_1,v_2,\cdots,v_r]+[v_1,Av_2,\cdots,v_r]+\cdots+[v_1,v_2,\cdots,Av_r]$$

となるから V_r は $\tilde{\rho}$－不変な部分空間となっている．

いま普通の通りに u_i を i 番目の座標だけが1であとは0のベクトルとすれば，明らかに次の式が成立する：

$$H_i u_j = \Lambda_j(H_i) u_j$$

すなわちすべての $H \in \mathfrak{h}$ に対して次の式が成立する：

$$H u_j = \Lambda_j(H) u_j$$

これから直ちにすべての $H \in \mathfrak{h}$ について次の式が得られる：

$$\tilde{\rho}(H)[u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots, u_{j_r}] = (\Lambda_{j_1}(H) + \Lambda_{j_2}(H) + \cdots + \Lambda_{j_r}(H))[u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}]$$

したがって $[u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots, u_{j_r}]$ は $\Lambda_{j_1} + \cdots + \Lambda_{j_r}$ をウェイトとするベクトルになっている.

さて $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$ は $\mathfrak{h}^*$ の基底であり,

$$\Lambda_n = -(\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_l)$$

となっているから $j_r = n$ の場合には

$$\Lambda_{j_1} + \cdots + \Lambda_{j_r} = -(\Lambda_{k_1} + \cdots + \Lambda_{k_{n-r}})$$

となる．ここに $k_1, \cdots, k_{n-r}$ は $(1, 2, \cdots, n)$ から $(j_1, \cdots, j_r)$ を取り去った残りである.

このことから $j_1 < \cdots < j_r$ で $j_1' < \cdots < j_r'$ のときには

$$\Lambda_{j_1} + \cdots + \Lambda_{j_r} = \Lambda_{j_1'} + \cdots + \Lambda_{j_r'}$$

が成立するのは $j_1 = j_1', \cdots, j_r = j_r'$ のときだけであることがわかる.

いま μ が $(\tilde{\rho}, V_r)$ のウェイトで u を $(V_r)_\mu$ の 0 でない元とする．このとき μ が $\Lambda_{j_1} + \cdots + \Lambda_{j_r}$ $(1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n)$ の形であって，u が $c[u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}]$ の形であることを証明する．このため，そうでないとして

$$u = u_1 + \cdots + u_m$$

であって u_i はすべて $c[u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}]$ $(1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n)$ の形をしているものとする.

さらに $1 < m$ で $u_1, \cdots, u_m$ のウェイトをそれぞれ $\mu_1, \cdots, \mu_m$ とすれば $\mu_1, \cdots, \mu_m$ は相異なるものとする．一般性を失わずに $\mu \neq \mu_1$ とする $\mu(H) \neq \mu_1(H)$ となるような H をとれば

$$\mu(H) u = \mu_1(H) u_1 + \cdots + \mu_m(H) u_m$$

となるから

$$0 = (\mu(H) - \mu_1(H)) u_1 + \cdots + (\mu(H) - \mu_m(H)) u_m$$

ここに $u_1, \cdots, u_m$ は基底の部分集合で $\mu(H) \neq \mu_1(H)$ であるから矛盾する.

これから V_r のすべてのウェイトは $\Lambda_{j_1} + \cdots + \Lambda_{j_r}$ $(1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n)$ の形であり，次元の計算から $\Lambda_{j_1} + \cdots + \Lambda_{j_r}$ のウェイト空間は $[u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}]$ で生成される一次元空間であることがわかる.

さて $(\tilde{\rho}, V_r)$ が既約な表現であることを証明する．V_r の $\tilde{\rho}$-不変な部分空間 W を

とって (ρ, W) が既約であったとする．このとき W の1つのウェイトを λ とすれば

$$\lambda = \Lambda_{j_1} + \cdots + \Lambda_{j_r} \qquad (1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n)$$

となっている．ところで $\mathfrak{sl}(n, C)$ の Weyl 群は $\mathfrak{S}_n$ であるから §12 の定理7によってすべての $\Lambda_{j_1'} + \cdots + \Lambda_{j_r'}$ $(1 \leq j_1' < \cdots < j_r' \leq n)$ は $(\tilde{\rho}, W)$ のウェイトになっている．すなわち $[u_{j_1'}, \cdots, u_{j_r'}] \in W$ となる．すなわち $W = V_r$ であることがわかって，$(\tilde{\rho}, V_r)$ が既約であることがわかった．

いま $v = [u_1, u_2, \cdots, u_r]$ とすれば v は $\lambda_r = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_r$ のウェイトベクトルである．さらに $X = E_{ij} (i < j)$ とすれば

$r < j$ ならば $\tilde{\rho}(E_{ij})[u_1, \cdots, u_r] = 0$

$j \leq r$ ならば $\tilde{\rho}(E_{ij})[u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots, u_r] = [u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_i, \cdots, u_r] = 0$

となるから $\tilde{\rho}(X)[u_1, \cdots, u_r] = 0$ となる．すなわち $[u_1, \cdots, u_r]$ は原始ベクトルである．すなわち V_r は λ_r を最高のウェイトとする既約表現であることがわかった．

さて，$\rho_1, \cdots, \rho_l$ をそれぞれ $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ を最高のウェイトとする既約表現とする．ここでは上の V_r を用いて ρ_r は (ρ_r, V_r) のこととする．このときに ρ_1 はもちろん $\mathfrak{sl}(n, C)$ を $V = C^n$ の上に作用される最も簡単な表現である．この表現は恒等表現と呼ばれる．

次に ρ_r と ρ_{n-r} との関係についてのべることにする．

一般に表現 ρ の表現空間を C^m として，$\rho(A)$ を $m \times m$ 行列としたときに

$$\sigma(A) = -{}^t\rho(A)$$

と定義すれば

$$\sigma([A, B]) = -{}^t[\rho(A), \rho(B)] = [{}^t\rho(A), {}^t\rho(B)]$$
$$= [\sigma(A), \sigma(B)]$$

となるからこの σ は再び表現になっている．この表現のことを ρ の共役表現という．

ρ の共役表現を ρ^* で表すことにする．

ここでついでに，G を線形リー群，(f, C^n) を G の表現としたときの f の共役表現 (f^*, C^n) を定義しておこう．

いま $g \in G$ としたときに f^* を次の式で定義する：

$$f^*(g) = {}^t(f(g^{-1}))$$

明らかに次の式が成立して f^* が G の表現であることがわかる．ここに e は G の単位

元である．

$$f^*(e)={}^tf(e)={}^tE=E$$

$$f^*(g_1g_2)={}^tf(g_2^{-1}g_1^{-1})={}^t(f(g_2^{-1})f(g_1^{-1}))=f^*(g_1)f^*(g_2)$$

さて δ^* と ρ^* との関係としては次の定理が成立する．

定理 1. f を線形リー群の表現，ρ をその微分とすれば ρ^* は f^* の微分になっている．

［証明］ $g=\exp(tX)$ として $f^*(g)={}^tf(g^{-1})$ に代入すれば

$$\begin{aligned} f^*(\exp(tX)) &= {}^tf(\exp(-tX)) = {}^t(\exp(-t\rho(X))) \\ &= \exp(-t({}^t\rho(X))) = \exp(t\rho^*(X)) \end{aligned}$$ ■

いま C^m の元を縦ベクトルで表したものを $u,v,\cdots$ として ${}^tu,{}^tv,\cdots$ をそれを横ベクトルとしたものとして $\langle u,v\rangle$ を

$$\langle u,v\rangle={}^tuv$$

とすれば $\langle u,v\rangle$ は非退化な双線形一次形式になっている．この形で ${}^tA$ は何を意味するかといえば

$$\langle u,Av\rangle={}^tuAv={}^t({}^tAu)v=\langle {}^tAu,v\rangle$$

となるから，${}^tA$ の意味は

$$\langle u,Av\rangle=\langle {}^tAu,v\rangle$$

と A を左側にもってきた意味での共役になっている．

一般の非退化な双線形一次形式は本質的に上の $\langle u,v\rangle$ と同型なものと考えることができるから，任意の非退化な双線形一次形式 $\langle u,v\rangle$ に対して ${}^tA$ を

$$\langle u,Av\rangle=\langle {}^tAu,v\rangle$$

によって定義して上の ${}^tA$ と同じものと考えることができる．この意味で ρ^* を

$-{}^t\rho(A)$ すなわち

$$\langle u,\rho(A)v\rangle+\langle \rho^*(A)u,v\rangle=0$$

によって定義される表現と考えてよい．

今度は $\langle u,v\rangle={}^tuv$ と f^* との関係を考えれば，

$${}^t(f^*(g)v)={}^t({}^t(f(g^{-1}))v)={}^tvf(g^{-1})$$

であるから $f^*(g)$ の表現の意味は，横ベクトルに $f(g^{-1})$ を右側から掛けてできる表現だと思ってよい．したがって

$$\langle f^*(g)u, f(g)v\rangle = {}^t u f(g^{-1}) f(g) v = {}^t u v$$
$$= \langle u, v\rangle$$

となるから，この内積は u に共役表現を施し，v にもとの表現を施せば不変であることがわかる．

f^* の作り方から，$(f^*)^* = f$ は明らかであり，またいまいったことから，f がユニタリー表現であることと f^* がユニタリー表現であることが同等であることがわかる．さらに f が既約であることと f^* が既約であることが同等であることも明らかであろう．

いま ρ_r と ρ_{n-r} とが互いに相手の共役表現になっていることを証明しよう．このため $u \in V_r$, $v \in V_{n-r}$ であって $u = [u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}]$ $(1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n)$, $v = [u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}]$ $(1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n)$ としたときに

$$u \wedge v = [u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}]$$

によって定義することにする．明らかに

$$u \wedge v = c[u_1, u_2, \cdots, u_n]$$

になっている．ここで c は次のように計算される：

（i） $j_1, \cdots, j_r$ と $k_1, \cdots, k_{n-r}$ との間に共通のものがあれば，$c = 0$

（ii） 上の場合でないときは $c = \pm 1$，ここで ± 1 は置換$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_r & k_1 & \cdots & k_{n-r} \end{pmatrix}$ が偶置換ならば 1，奇置換ならば -1 と定義する．

一般の $u \in V_r$, $v \in V_{n-r}$ に対しては $u \wedge v$ は上の定義から線形に拡大して定義するものとする．このとき $u \wedge v = c[u_1, u_2, \cdots, u_n]$ となるときに

$$\langle u, v\rangle = c$$

と定義すれば，$\langle u, v\rangle$ は明らかに非退化な双線形一次形式になっている．

さて，いま $A \in \mathfrak{sl}(n, C)$ を行列の形でかいて

$$A = (a_{ij})$$

となっていたとする．さらにいま $u = [u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}]$, $v = [u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}]$ とすれば $u \wedge v \neq 0$ として

$$\begin{aligned} &\rho(A)[u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}] \\ &\quad = [Au_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}] \\ &\qquad + \cdots + [u_{j_1}, \cdots, Au_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}] \end{aligned}$$

$$+ [u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, Au_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}] + \cdots + [u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, Au_{k_{n-r}}]$$
$$= (\rho_r(A)u) \wedge v + u \wedge (\rho_{n-r}(A)v)$$

となっている．

ところで計算から明らかなように

$$[Au_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}]$$
$$= [a_{1j_1}u_1 + a_{2j_1}u_2 + \cdots + a_{nj_1}u_n, u_{j_2}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}]$$

ところで u_{j_1}以外の u_i は第2項以下にでてきて同じものが2度現れれば $[\ ,\cdots,]$ は0となるから

$$[Au_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}] = [a_{j_1j_1}u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}]$$
$$= a_{j_1j_1}[u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}]$$

となる．これから $A \in \mathfrak{sl}(n,C)$ ならば $\mathrm{Tr}(A) = 0$ だから

$$\rho(A)[u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}]$$
$$= \mathrm{Tr}(A)[u_{j_1}, \cdots, u_{j_r}, u_{k_1}, \cdots, u_{k_{n-r}}] = 0$$

となる．これから以前の式を用いて一般に

$$(\rho_r(A)u) \wedge v + u \wedge (\rho_{n-r}(A)v) = 0$$

すなわち次の式が得られて ρ_r と ρ_{n-r} とが互いに相手の共役表現であることがわかった．

$$\langle \rho_r(A)u, v \rangle + \langle u, \rho_{n-r}(A)v \rangle = 0$$

§ 17. $\mathfrak{o}(n,C)$

$\mathfrak{o}(n,C)$ についてのべる前にまず $O(n,C)$ についてのべることにする．$u, v \in C^n$ として，前節にのべた双線形一次形式

$$\langle u, v \rangle = {}^t uv$$

を考えることにする．いま $O(n,C)$ をすべての $u, v \in C^n$ について次の条件をみたす $A \in M(n,C)$ の全体と定義する：

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$$

この定義から，$O(n,C)$ が群をなすことは明らかであろう．いま上の条件をかき直せば

$${}^t u {}^t AAv = {}^t uv$$

であるからこの条件は

$${}^t AA = E$$

と同等なことが直ちにわかる．さらにこの条件から $O(n,C)$ が $M(n,C)$ の閉集合，したがって $O(n,C)$ が線形リー群であることがわかる．$O(n,C)$ は complex orthogonal group of degree n (n 次複素直交群) とよばれる．

$O(n,C)$ のリー代数を $\mathfrak{o}(n,C)$ とかく．

いま $X\in M(n,C)$ として $X\in\mathfrak{o}(n,C)$ である条件を求めれば

$$X\in\mathfrak{o}(n,C) \iff \text{すべての } t\in R \text{ について } {}^t\exp(tX)\exp tX=E$$
$$\iff \text{すべての } t\in R \text{ について } \exp(t{}^tX)\exp tX=E$$

いま $\exp(t{}^tX)\exp tX=E$ を t で微分して $t=0$ とおけば次の式が得られる：

$${}^tX+X=0$$

逆に ${}^tX+X=0$ とすれば ${}^tX=-X$ から

$$\exp(t{}^tX)\exp tX=E$$

がすべての $t\in R$ について成立するから

$$X\in\mathfrak{o}(n,C) \iff {}^tX+X=0$$

が得られた．

${}^tX+X=0$ から X の対角線の部分がすべて0になっていることがわかるから $\mathfrak{o}(n,C)\subseteq\mathfrak{sl}(n,C)$ になっている．

いま $SO(n,C)=O(n,C)\cap SL(n,C)$ と定義して $SO(n,C)$ のリー代数を $\mathfrak{so}(n,C)$ と定義するが，上のことから $\mathfrak{so}(n,C)=\mathfrak{o}(n,C)$ は明らかである．

さて $\mathfrak{o}(n,C)$ の Killing 形式について考えることにする．

$\mathfrak{gl}(n,C)$ の Killing 形式（§5）のときと同じように

$$\kappa(X,X)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)^2)$$

を計算すればよい．

$$\mathrm{ad}(X)^2Z=[X,[X,Z]]=X^2Z-2XZX+ZX^2$$

である．

さて ${}^tX+X=0$ から $E_{ij}-E_{ji}(1\leq i<j\leq n)$ が $\mathfrak{o}(n,C)$ の基底であることがわかる．いまこの基底を選んで $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)^2)$ の計算をする．

まず ${}^tX^2=({}^tX)({}^tX)=(-X)(-X)=X^2$ となるから X^2 は対称行列である．いま $X^2=A=(a_{rs})$ とすれば $a_{rs}=a_{sr}$ となるから，次の計算が成立する：

$$A(E_{ij}-E_{ji})+(E_{ij}-E_{ji})A$$

$$= \sum_{r,s} a_{rs}E_{rs}(E_{ij}-E_{ji}) + \sum_{r,s} a_{rs}(E_{ij}-E_{ji})E_{rs}$$
$$= \sum_{r} a_{ri}E_{rj} - \sum_{r} a_{rj}E_{ri} + \sum_{s} a_{js}E_{is} - \sum_{s} a_{is}E_{js}$$
$$= \sum_{r} a_{ri}E_{rj} - \sum_{r} a_{rj}E_{ri} + \sum_{r} a_{rj}E_{ir} - \sum_{r} a_{ri}E_{jr}$$
$$= \sum_{r} a_{ri}(E_{rj}-E_{jr}) + \sum_{r} a_{rj}(E_{ir}-E_{ri})$$

したがって $E_{ij}-E_{ji}(1 \le i < j \le n)$ を基底としたときの Z に $AZ+ZA$ を対応させる一次変換のトレースは $\sum_{i<j}(a_{ii}+a_{jj})$ となる．ここで a_{ii} がこの和のなかで現れる個数を数えれば，$i<j$ である j は $n-i$ 個であるから $(a_{ii}+a_{jj})$ の第1項として a_{ii} が現れる個数は $n-i$ 個である．また i より小さい k の個数は $i-1$ 個であるから a_{ii} が $\sum_{k<i}(a_{kk}+a_{ii})$ の $(a_{kk}+a_{ii})$ の第2項として現れる個数は $i-1$ 個である． 合計して $n-1$ 回現れることになる．したがって，Z に X^2Z+ZX^2 を対応させる一次変換のトレースは次のものとなる：

$$(n-1)\mathrm{Tr}(X^2)$$

次に Z に XZX を対応させる一次変換のトレースを考えるために $X=(x_{ij})$ とすれば $x_{ij}=-x_{ji}$ となるから（特に $x_{ii}=0$ となるから）

$$X(E_{ij}-E_{ji})X = \sum_{\substack{r,s\\ r',s'}} x_{rs}x_{r's'}E_{rs}(E_{ij}-E_{ji})E_{r's'}$$
$$= \sum_{r,s'} x_{ri}x_{js'}E_{rs'} - \sum_{r,s'} x_{rj}x_{is'}E_{rs'}$$
$$= -\sum_{r,s} x_{ir}x_{js}E_{rs} + \sum_{r,s} x_{js}x_{ir}E_{sr}$$
$$= \sum_{r,s} x_{ir}x_{js}(E_{sr}-E_{rs})$$

したがって Z を XZX にする一次変換のトレースは $\sum_{i<j} x_{ij}x_{ji}$．ここで $x_{ii}=0$ に注意すれば，これは $\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_{ij}x_{ji}$ になっている．すなわち $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X^2)$ を得る．以上によって

$$\kappa(X,X) = (n-2)\ \mathrm{Tr}(X^2)$$

したがって，$\mathfrak{gl}(n,C)$ のときと同じ計算で

$$\kappa(X,Y) = (n-2)\ \mathrm{Tr}(XY)$$

が得られた．

これを用いて $\mathfrak{o}(n,C)$ が半単純であることを証明する．§5 の定理 2 の系 1 によって Killing 形式が $\mathfrak{o}(n,C)$ の上で非退化なことをいえば十分である．

いま $X\in\mathfrak{o}(n,C)$ として，すべての $Y\in\mathfrak{o}(n,C)$ に対して $\mathrm{Tr}(XY)=0$ になったと

する．このとき $Z \in \mathfrak{gl}(n, C)$ とすれば ${}^t(Z - {}^tZ) = -(Z - {}^tZ)$ となるから $Z - {}^tZ \in \mathfrak{o}(n, C)$，したがって

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Tr}(X(Z - {}^tZ)) = \mathrm{Tr}(XZ) - \mathrm{Tr}(X{}^tZ) \\ &= \mathrm{Tr}(XZ) - \mathrm{Tr}({}^tXZ) = \mathrm{Tr}((X - {}^tX)Z) \end{aligned}$$

が成立する．Z は $\mathfrak{gl}(n, C)$ の任意の元であるから $X = {}^tX$ ところで $X = -{}^tX$ であるから $X = 0$ が証明されて κ が $\mathfrak{o}(n, C)$ の上で非退化なことがわかった．

さて $O(n, C)$ や $\mathfrak{o}(n, C)$ をもう少し一般の形に表すことを考える．

いま $V = C^n$ として，V の上の非退化な対称双線形一次形式を 2 つとって f と φ とする．このとき明らかに $\xi \in \mathrm{Aut}\, V$ が存在して

$$\varphi(x, y) = f(\xi x, \xi y)$$

となっている．この関係を簡単に $\varphi = f \circ \xi$ とかくことにする．$O(f)$ を次の式で定義する：

$$O(f) = \{g \in \mathrm{Aut}\, V |\ \text{すべての}\ x, y \in V\ \text{について}\ f(gx, gy) = f(x, y)\}$$

このとき $f \circ \xi = \varphi$ から

$$g \in O(\varphi) \iff \xi g \xi^{-1} \in O(f)$$

が成立する．すなわち $O(\varphi)$ と $O(f)$ とは同型になっている．

いま x, y を C^n の縦ベクトルとして f が

$$f(x, y) = {}^txFy$$

となるように行列 F をとれば

$$g \in O(f) \iff {}^tgFg = F$$

となる．いますべての実数 t について

$$\exp tX \in O(f)$$

が成立するということから

$$\exp(t\,{}^tXF) \exp tX = F$$

前と同じように t で微分して $t = 0$ とおけば

$${}^tXF + FX = 0$$

となる．逆に X がこの条件をみたせば $\exp tX \in O(f)$ となることも前と同じようにわかる．

したがって $O(f)$ のリー代数を $\mathfrak{o}(f)$ とおけば，次の式が得られる：

$$\mathfrak{o}(f) = \{X \in \mathrm{End}\, V \mid {}^tXF + FX = 0\}$$

ここで $F=E$ とおけば，$\mathfrak{o}(n, C)$ が得られる．しかし F は ${}^txFy$ が非退化な対称双線形一次形式になるようなどんな F を選んでも同型なリー代数が得られることがわかった．

以下には $n = 2l+1$ のときには

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_l \\ 0 & E_l & 0 \end{pmatrix}$$

を選ぶことにする．ここに E_l は $l \times l$ 型の単位行列とする．そしてこの $\mathfrak{o}(f)$ を単に $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ とかくことにする．

さらに $n = 2l$ のときは

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ E_l & 0 \end{pmatrix}$$

を選ぶことにする．このときもこの $\mathfrak{o}(f)$ を $\mathfrak{o}(2l, C)$ とかくことにする．

さて $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ をもう少し詳しく調べることにする．いま $X \in \mathfrak{o}(2l+1, C)$ として

$$X = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & M & N \\ c_2 & P & Q \end{pmatrix}$$

とおく．ここに M, N, P, Q は $l \times l$ 型の行列である．$a \in C$ で b_1, b_2 はそれぞれ C^l の横ベクトル，c_1, c_2 はそれぞれ C^l の縦ベクトルになっている．

このとき上の F をとって

$$FX = -{}^tXF$$

という条件に $a, b_1, b_2, c_1, c_2, M, N, P, Q$ についての条件にかき直せば次のようになる：

$$a = 0, \qquad c_1 = -{}^tb_2, \qquad c_2 = -{}^tb_1$$
$$Q = -{}^tM, \qquad {}^tN = -N, \qquad {}^tP = -P$$

これから次のように $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ の基底が選べることがわかる．まず行列の対角線に相当するところを $Q = -{}^tM$ から $E_{ii} - E_{l+i, l+i} (2 \leq i \leq l+1)$ をとればよい．次に $c_1 = -{}^tb_2$, $c_2 = -{}^tb_1$ の関係は

$$E_{1, l+i+1} - E_{i+1, 1}, \qquad E_{1, i+1} - E_{l+i+1, 1} \qquad (1 \leq i \leq l)$$

をとればよい．さらに $Q = -{}^tM$ の対角線以外の形は

$$E_{i+1, j+1} - E_{l+j+1, l+i+1} \qquad (1 \leq i \neq j \leq l)$$

をとればよい．最後に ${}^tN=-N,\ {}^tP=-P$ に対しては次のものをとればよい：

$$E_{i+1,l+j+1}-E_{j+1,l+i+1}\qquad(1\leq i<j\leq l)$$

$$E_{i+l+1,j+1}-E_{j+l+1,i+1}\qquad(1\leq i<j\leq l)$$

以上によって $\mathfrak{o}(2l+1,C)$ の複素次元が $2l^2+l$ であることは明らかであろう．

$\mathfrak{o}(2l+1,C)$ の元で対角線以外は 0 となっているものの全体を $\mathfrak{h}$ とかくことにする．明らかに $\mathfrak{h}$ の基底は

$$E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1}\qquad(1\leq i\leq l)$$

である．まず定義から明らかに $\mathfrak{h}$ は等羅部分代数である．次に $E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1}$ と他の形の $\mathfrak{o}(2l+1,C)$ の基底の元との交換関係を調べれば

$$[\sum_j a_j(E_{1,l+j+1}-E_{j+1,1}),\ E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1}]$$
$$=-a_i(E_{1,l+i+1}-E_{i+1,1})$$

$$[\sum_j b_j(E_{1,j+1}-E_{l+j+1,1}),\ E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1}]$$
$$=b_i(E_{1,i+1}-E_{l+i+1,1})$$

$$[\sum_{j\neq k} c_{ik}(E_{j+1,k+1}-E_{l+k+1,l+j+1}),\ E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1}]$$
$$=\sum_{j\neq i} c_{ji}(E_{j+1,i+1}-E_{l+i+1,l+j+1})$$

$$[\sum_{j<k} d_{jk}(E_{j+1,l+k+1}-E_{k+1,l+j+1}),\ E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1}]$$
$$=\sum_{j<i} d_{ji}(E_{i+1,l+j+1}-E_{j+1,l+i+1})$$
$$+\sum_{i<k} d_{ik}(E_{k+1,l+i+1}-E_{i+1,l+k+1})$$

$$[\sum_{j<k} e_{jk}(E_{j+l+1,k+1}-E_{k+l+1,j+1}),\ E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1}]$$
$$=\sum_{j<i} e_{ji}(E_{j+l+1,i+1}-E_{l+i+1,j+1})$$
$$+\sum_{i<k} e_{ik}(E_{i+l+1,k+1}-E_{k+l+1,i+1})$$

となるから $\mathfrak{h}$ のすべての元と交換可能な $\mathfrak{o}(2l+1,C)$ の元は $\mathfrak{h}$ の元だけとなる．すなわち $\mathfrak{h}$ は Cartan 部分代数となっている．

いま前と同じく $\mathfrak{h}$ の元 H に対してその対角線の i 番目の元を H に対応させる関数を $\Lambda_i(H)$ とおき，$\Lambda_i'(H)=\Lambda_{i+1}(H)\ (1\leq i\leq l)$ とおけば，すべての $\mathfrak{h}$ の元 H に対して次の関係式が成立する：

$$H=\sum_{i=1}^{l}\Lambda_i'(H)(E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1})$$

さてこの式を用いて上の式をかき直せば

$$[H,E_{1,i+1}-E_{l+i+1,1}]=-\Lambda_i'(H)(E_{1,i+1}-E_{l+i+1,1})$$

$$[H,E_{1,l+i+1}-E_{i+1,1}]=\Lambda_i'(H)(E_{1,l+i+1}-E_{i+1,1})$$

$$[H,E_{l+i+1,j+1}-E_{l+j+1,i+1}]=-(\Lambda_i'(H)+\Lambda_j'(H))(E_{l+i+1,j+1}-E_{l+j+1,i+1})$$

$$[H,E_{i+1,l+j+1}-E_{j+1,l+i+1}]=(\Lambda_i'(H)+\Lambda_j'(H))(E_{i+1,l+j+1}-E_{j+1,l+i+1})$$

$$[H,E_{i+1,j+1}-E_{l+j+1,l+i+1}]=(\Lambda_i'(H)-\Lambda_j'(H))(E_{i+1,j+1}-E_{l+j+1,l+i+1})$$

となっているから $\mathfrak{o}(2l+1,C)$ の 0 でないルートの全体 Φ は

$$\Phi=\{\pm\Lambda_i'\,|\,1\leq i\leq l\}\cup\{\pm(\Lambda_i'+\Lambda_j')\,|\,1\leq i<j\leq l\}\cup\{\pm(\Lambda_i'-\Lambda_j')\,|\,1\leq i<j\leq l\}$$

と $2l^2$ 個の元から成っており，$\alpha\in\Phi$ としたときの Cartan 分解の L_α はそれぞれ上の基底の $\mathfrak{h}$ に属していない元から生成される.

いま $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ を次の式で定義する：

$$1\leq i\leq l-1 \quad \text{ならば} \qquad \alpha_i=\Lambda_i'-\Lambda_{i+1}', \qquad \alpha_l=\Lambda_l'$$

このとき

$$\Lambda_i'=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_l$$

$$\Lambda_i'+\Lambda_j'=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}+2\alpha_j+2\alpha_{j+1}+\cdots+2\alpha_l \qquad (i<j)$$

$$\Lambda_i'-\Lambda_j'=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1} \qquad (i<j)$$

となるから $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ が Φ の基本系であって Φ^+ が $\Lambda_i'(1\leq i\leq l)$, $\Lambda_i'+\Lambda_j'(1\leq i<j<l)$, $\Lambda_i'-\Lambda_j'(1\leq i<j<l)$ から成ることがわかる.

さて

$$\kappa(H,E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1})=(2l-1)\mathrm{Tr}(H(E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1}))$$
$$=2(2l-1)\Lambda_i'(H)$$

となるから $\alpha=\Lambda_i'$ としたときに $(1\leq i\leq l-1)$

$$T_\alpha=\frac{1}{2(2l-1)}(E_{i+1,i+1}-E_{l+i+1,l+i+1})$$

が得られる. これから $\alpha=\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ に対しては

$$T_{\alpha_i}=\frac{1}{2(2l-1)}(E_{i+1,i+1}-E_{i+2,i+2}-E_{l+i+1,l+i+1}+E_{l+i+2,l+i+2}) \qquad (i\leq l-1)$$

$$T_{\alpha_l}=\frac{1}{2(2l-1)}(E_{l+1,l+1}-E_{2l+1,2l+1})$$

これから内積 $(\alpha_i,\alpha_j)=\kappa(T_{\alpha_i},T_{\alpha_j})$ が計算され次の値が得られる：

$$(\alpha_i, \alpha_i) = \frac{1}{2l-1} \qquad (i = 1, \cdots, l-1 \text{ のとき})$$

$$(\alpha_l, \alpha_l) = \frac{1}{2(2l-1)}$$

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(2l-1)} & (|i-j| = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|i-j| \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

したがって $\langle\beta, \alpha\rangle = \dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ を計算すれば

$$\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle = 2$$

$$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = 0 \qquad (|i-j| \geq 2 \text{ のとき})$$

$$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = -1 \qquad (|i-j| = 1 \text{ で } j \neq l \text{ のとき})$$

$$\langle\alpha_{l-1}, \alpha_l\rangle = -2$$

となり Cartan 行列は

$$B_l = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & -1 & \\ & -1 & \ddots & 2 & -2 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

であることがわかる．すなわち $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ は B_l 型の複素単純リー代数である．

さて $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ の Weyl 群 $\mathcal{W}$ を考えることにする．このため σ_{α_i} を σ_i とかくことにして，σ_i が $\Lambda_1', \cdots, \Lambda_l'$ にどのような作用をするかをみれば

$k < l$ のときは

$$\sigma_k(\Lambda_k') = \Lambda_{k+1}', \qquad \sigma_k(\Lambda_{k+1}') = \Lambda_k'$$

$$\sigma_k(\Lambda_i') = \Lambda_i' \qquad (i \neq k,\ k+1 \text{ でないとき})$$

すなわち σ_k は Λ_k' と Λ_{k+1}' との互換になっている．ところで σ_l を考えれば

$$\sigma_l(\Lambda_l') = -\Lambda_l', \qquad \sigma_l(\Lambda_i') = \Lambda_i' \qquad (i \neq l)$$

となっている．したがって Weyl 群の任意の元は $\Lambda_1', \cdots, \Lambda_l'$ を適当に入れ換えた上でその前に ± 1 をつける作用をする操作になっている．また逆に任意のそのような操作をとればそれは Weyl 群の元で実現できることは明らかであるから Weyl 群はそのような操作の全体でできる群になっている．

いま N を $\Lambda_1', \cdots, \Lambda_l'$ の入れ換えをしないでただ単にそのおのおのの $\Lambda_1', \cdots, \Lambda_l'$ の前に ± 1 をつける作用とすれば，± 1 は $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ で表されるから，N は $(\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^l$ と同型な群になっている．明らかに N は $\mathcal{W}$ のなかの正規部分群になっている．次に F は ± 1 は忘れて $\Lambda_1', \cdots, \Lambda_l'$ を入れ換えだけする操作とすれば明らかに F は $\mathcal{W}$ の部分群であって F は $\{1, 2, \cdots, l\}$ の置換群 $\mathfrak{S}_l$ と同型になっている．

いま明らかに $\mathcal{W} = NF$ で $N \cap F = \{e\}$ (e は単位元) となっている．このとき $\mathcal{W}$ は N と F との半直積であるという．すなわち $\mathcal{W}$ は $(\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^l$ と $\mathfrak{S}_l$ との半直積によってできる群になっている．

さて $T_{\alpha_1}, \cdots, T_{\alpha_l}, H_{\alpha_1}, \cdots, H_{\alpha_l}$ をそれぞれ $T_1, \cdots, T_l, H_1, \cdots, H_l$ とかけば

$$H_\alpha = \frac{2T_\alpha}{\kappa(T_\alpha, T_\alpha)}$$

を用いて　$H_1, \cdots, H_l$ を計算すれば次の式を得る：

$$H_i = E_{i+1, i+1} - E_{l+i+1, l+i+1} - E_{i+2, i+2} + E_{l+i+2, l+i+2} \qquad (i \leq l-1)$$

$$H_l = 2(E_{l+1, l+1} - E_{2l+1, 2l+1})$$

これから次の式が得られる．

$$\Lambda_1'(H_1) = 1, \qquad \Lambda_1'(H_i) = 0 \qquad (i \neq 1)$$

$$\Lambda_j'(H_{j-1}) = -1, \qquad \Lambda_j'(H_j) = 1, \qquad \Lambda_j'(H_k) = 0$$

$$(k \neq j-1, j;\ j = 2, \cdots, l-1)$$

$$\Lambda_l'(H_{l-1}) = -1, \qquad \Lambda_l'(H_l) = 2, \qquad \Lambda_l'(H_k) = 0 \qquad (k \neq l-1, l)$$

これから $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ の基本的整ウェイトを $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ とすれば，次の式が得られる $(\lambda_i(H_j) = \delta_{ij})$：

$$r \leq l-1 \quad \text{ならば} \qquad \lambda_r = \Lambda_1' + \cdots + \Lambda_r'$$

$$\lambda_l = \frac{1}{2}(\Lambda_1' + \cdots + \Lambda_l')$$

これに $\Lambda_i' = \alpha_i + \cdots + \alpha_l$ を用いて λ_i を $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ で表せば次の式を得る：

$$\lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l) \qquad (i < l)$$

$$\lambda_l = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + l\alpha_l)$$

もちろんこの式は Cartan 行列の逆行列を計算しても得られる．

ここで Cartan 分解の様子を調べることにする．$1 \leq i \leq l-1$ とすれば $\alpha_i = \Lambda_i' -$

Λ_{i+1}' であるから L_{α_i} の生成元 X_{α_i}（以下 X_i とかくことにする）として次のものをとればよいことがわかる：

$$X_i = E_{i+1,i+2} - E_{l+i+2,l+i+1}$$

ここで $H_i = E_{i+1,i+1} - E_{l+i+1,l+i+1} - E_{i+2,i+2} + E_{l+i+2,l+i+2}$ を考えれば $Y_i = Y_{\alpha_i}$ としては次のものをとればよいことがわかる：

$$Y_i = E_{i+2,i+1} - E_{l+i+1,l+i+2}$$

さて $i=l$ の場合は $\alpha_l = \Lambda_l'$ であるから $X_l = X_{\alpha_l}$ としては次のものをとればよい：

$$X_l = E_{1,2l+1} - E_{l+1,1}$$

ここで $H_l = 2(E_{l+1,l+1} - E_{2l+1,2l+1})$ であることを考えれば $Y_l = Y_{\alpha_l}$ としては次のものをとればよい：

$$Y_l = 2(E_{2l+1,1} - E_{1,l+1})$$

$\alpha, \beta, \alpha+\beta$ がすべてルートであるときは $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$ になるから，一般の正のルート α についての X_α, Y_α は $X_1, \cdots, X_l$ および $Y_1, \cdots, Y_l$ から交換子積によって生成される．

C^{2l+1} を V とかいて，$\mathfrak{o}(2l+1, C)$ の恒等表現を (ρ, V) とかくことにする．すなわち $A \in \mathfrak{o}(2l+1, C)$ として $v \in V$ とすれば $\rho(A)v = Av$ である．

いま $1 \leq r \leq l-1$ とおいて，基本的整ウェイト λ_r に対する既約表現を構成することにする．

§16 と同じく V_r を V の r 個のテンソル積 $V \otimes \cdots \otimes V$ のなかの階数 r の交代テンソルの全体とする．前と同じく $[v_1, \cdots, v_r]$ の記号を用いることにする．また前と同じく $u_1, \cdots, u_{2l+1}$ を V の基底，すなわち

$$u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow i \text{ 番目}$$

とする．このとき $\tilde{\rho} = \rho \otimes \cdots \otimes \rho$ とすれば

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}(H)[u_2, \cdots, u_{r+1}] \\ &\quad = [Hu_2, \cdots, u_{r+1}] + [u_2, Hu_3, \cdots, u_{r+1}] + \cdots + [u_2, \cdots, u_r, Hu_{r+1}]\end{aligned}$$

$$= (\Lambda_1'(H) + \cdots + \Lambda_r'(H))[u_2, \cdots, u_{r+1}] = \lambda_r(H)[u_2, \cdots, u_{r+1}]$$

であり，さらに

$$\tilde{\rho}(X_i)[u_2, \cdots, u_{r+1}] = 0$$

は明らかである．α を正のルートとするとき X_α は $X_1, \cdots, X_l$ から交換子積で生成されるから，すべての X_α について

$$\tilde{\rho}(X_\alpha)[u_2, \cdots, u_{r+1}] = 0$$

となる．すなわち $[u_2, \cdots, u_{r+1}]$ は原始ベクトルになっている．これから §15 の補題 1 によって，$[u_2, \cdots, u_{r+1}]$ を含む $\tilde{\rho}$-不変な最小の部分空間を W とすれば，$(\tilde{\rho}, W)$ が λ_r を最高のウェイトとする既約表現になっていることがわかる．

さて Weyl の定理によって W の次元 N を計算すれば，§15 の終りの公式によって

$$N = \prod_k \frac{\sum_{j=1}^{l} (m_j + 1) k_j (\alpha_j, \alpha_j)}{\sum_{j=1}^{l} k_j (\alpha_j, \alpha_j)}$$

ところでいまの場合は $m_j = \delta_{jr}$ であるから，これは次の形になる：

$$N = \prod_k \frac{\sum_j (\delta_{jr} + 1) k_j (\alpha_j, \alpha_j)}{\sum_j k_j (\alpha_j, \alpha_j)} = \prod_k \frac{2 \sum_{j=1}^{l-1} (\delta_{jr} + 1) k_j + k_l}{2 \sum_{j=1}^{l-1} k_j + k_l}$$

さて $k_1, \cdots, k_l$ の形は次の形で全部となる：

［Ⅰ］ $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l \qquad (1 \leq i \leq l)$

［Ⅱ］ $\alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \cdots + 2\alpha_l \qquad (1 \leq i < j \leq l)$

［Ⅲ］ $\alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \qquad (1 \leq i < j \leq l)$

この 3 つの場合に分けて上の式の右辺を計算することにする．

［Ⅰ］の場合は $r < i$ のときは分母と分子が等しくて 1 になるから無視してよい．すなわち

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{2(l - i + 1) + 1}{2(l - i) + 1} = \prod_{i=1}^{r} \frac{2l - 2i + 3}{2l - 2i + 1} = \frac{2l + 1}{2l - 2r + 1}$$

［Ⅱ］の場合も，$r < i$ の場合は無視してよい．$i \leq r$ の場合は $i \leq r \leq j - 1$ のときと $j \leq r \leq l - 1$ のときとに分ければ次の式であることがわかる．

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=r+1}^{l} \frac{2(j - i + 1) + 4(l - j) + 2}{2(j - i) + 4(l - j) + 2} \prod_{i<j\leq r} \frac{2(j - i) + 4(l - j + 1) + 2}{2(j - i) + 4(l - j) + 2}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=r+1}^{l} \frac{2l - j - i + 2}{2l - j - i + 1} \prod_{i<j\leq r} \frac{2l - i - j + 3}{2l - i - j + 1}$$

さてここで第1項については次の式が成立する：

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{l}\frac{2l-j-i+2}{2l-j-i+1}=\prod_{i=1}^{r}\frac{2l-r-i+1}{l-i+1}=\frac{(2l-r)!}{(2l-2r)!}\cdot\frac{(l-r)!}{l!}$$

第2項に関しては次の式が成立する：

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{i<j\le r}\frac{2l-i-j+3}{2l-i-j+1}=\left(\prod_{i=1}^{r-2}\prod_{i<j\le r}\frac{2l-i-j+3}{2l-i-j+1}\right)\frac{2l-2r+4}{2l-2r+2}$$

ところでこの右辺の第1項には次の式が成立する：

$$\prod_{i=1}^{r-2}\prod_{i<j\le r}\frac{2l-i-j+3}{2l-i-j+1}=\prod_{i=1}^{r-2}\frac{(2l-2i+2)(2l-2i+1)}{(2l-i-r+1)(2l-i-r+2)}$$

$$=\frac{(2l)!}{(2l-2r+4)!}\frac{(2l-2r+2)!}{(2l-r)!}\frac{(2l-2r+3)!}{(2l-r+1)!}$$

ここで次の式を用いている：

$$\prod_{i=1}^{r-2}(2l-2i+2)(2l-2i+1)=\frac{(2l)!}{(2l-2r+4)!}$$

全体として第2項は次の式となる：

$$\frac{(2l)!(2l-2r+1)!}{(2l-r)!(2l-r+1)!}$$

［Ⅲ］ の場合も $r<i$ のときと $j\le r$ のときは無視してよい．したがって次の式であることがわかる：

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{l}\frac{j-i+1}{j-i}=\prod_{i=1}^{r}\frac{l-i+1}{r-i+1}=\frac{l!}{(l-r)!r!}$$

以上を全部総合して求める次元 N は

$$N=\binom{2l+1}{r}$$

であることがわかった．ところでこれは V_r の次元に等しい．すなわち $W=V_r$ であることがわかる．いいかえれば $(\tilde{\rho}, V_r)$ が λ_r を最高のウェイトとする基本的な既約表現になっている．

さて以上の議論においては $1\le r\le l-1$ としている．したがって λ_l の場合の基本的な既約表現は別な方法で求めなければならない．次節において Clifford（クリッフォード）代数について議論をして，その結果を用いて $\mathfrak{o}(2l+1,C)$ の λ_l に属する既約表現を求めることにする．

§18.　Clifford 代数と外積代数

ここで代数学の用語を少しばかり導入することにする．C の上の線形空間 A に2元 a, b の積 ab が定義されていて，$a, b, c \in A$，$\lambda \in C$ に対して次の等式が成立するときに A を C の上の代数という．

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad (a+b)c = ac + bc$$

ここに $ab = ba$ は仮定されていないことに注意してほしい．前にのべた一般多項式の全体は C の上の代数の典型的なものである．蛇足を付け加えれば，リー代数の交換子積は $(ab)c = a(bc)$ に相当する規則をみたしていないから，リー代数の代数という用語は異例な用い方ということになる．

いま A を C の上の代数とする．A の線形部分空間 I が A のイデアルであるということを次の条件がみたされていることと定義する：

$$a \in A,\ b \in I \implies ab \in I$$

$$a \in A,\ b \in I \implies ba \in I$$

いま A が C の上の代数，I をそのイデアルとするとき，$a, b \in A$ に対して $a \equiv b \bmod I$ ということを

$$(a-b) \in I$$

によって定義する．明らかに $a \equiv b \bmod I$ は同値関係になっている．すなわち $a, b, c \in A$ について次の条件がみたされている．

$$a \equiv a \bmod I$$

$$a \equiv b \bmod I \implies b \equiv a \bmod I$$

$$a \equiv b \bmod I,\ b \equiv c \bmod I \implies a \equiv c \bmod I$$

さらに次の条件がみたされていることも明らかであろう．

$$\lambda \in C,\ a \equiv b \bmod I \implies \lambda a \equiv \lambda b \bmod I$$

$$a \equiv b \bmod I,\ c \equiv d \bmod I \implies a + c \equiv b + d \bmod I$$

$$a \equiv b \bmod I,\ c \equiv d \bmod I \implies ac \equiv bd \bmod I$$

念のために最後のものだけを証明すれば

$$(a-b) \in I,\ (c-d) \in I \implies ac - bd = (a-b)c + b(c-d) \in I$$

となる．

したがって A の元を $\mathrm{mod}\, I$ で類別したものは再び C の上の代数になっている．この C の上の代数を A/I で表す．集合の用語を用いると次のようになる．いま $a \in A$ に対して $a+I$ を次の集合と定義する：

$$a+I=\{a+b \mid b \in I\}$$

このとき　$a+I=\{c \mid a \equiv c \bmod I\}$　になっていることは明らかであろう．すなわち $a+I$ は $\mathrm{mod}\, I$ で a と同値な元全体の集合になっている．このとき A/I は $a+I$ の全体の集合と考えてよい．すなわち

$$A/I=\{a+I \mid a \in A\}$$

ここで A/I の演算は次の形になっていることは明らかであろう：

$$\lambda(a+I)=\lambda a+I$$
$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$$
$$(a+I)(b+I)=ab+I$$

さて以上の用語を用いてまず Clifford 代数の定義をすることとする．V を複素線形空間で，B を V の上に定義された対称双一次形式とする．このとき V の基底をとって $u_1, \cdots, u_m$ とするとき，$u_1, \cdots, u_m$ の一般多項式の全体を T とする．明らかに T は C の上の代数になっている．

いま T のイデアル I を，$\{u^2-B(u,u) \mid u \in V\}$ によって生成された T のイデアルと定義する．もっと詳しくいえば $\{u^2-B(u,u) \mid u \in V\}$ によって生成された T のイデアルとは T のイデアルで $\{u^2-B(u,u) \mid u \in V\}$ を含むもののなかで最小のものをいう．さらに詳しくいえば I は次の形の T の元の有限和の全体になっている：

$$t(u^2-B(u,u))t'$$

ここに t, t' は T の任意の元で u は V の任意の元である．$B(u,u)$ は複素数したがって T の元であり，u^2 も T の元であるから，上の形は全体として T の元になっている．I が和について閉じていることは上の形の有限和であることから明らかである．T の任意の元 t_0 をとったときに I の元に t_0 を左から掛けても，右から掛けてもまた I の元になることは上の形の両側に t, t' という形がかかっていることから明らかである．したがって上の形の有限和の全体が $u^2-B(u,u)$ の形をすべて含んだイデアルであって，そのようなイデアルのなかで最小なものになっていることは明らかであろう．

T/I が Clifford 代数であるから，Clifford 代数はもちろん V とその上の対称双一次形

式 B によって定まる．しかし V の基底の取り方には依存しない．この事を詳しくいえば，$u_1,\cdots,u_m$ とは別の基底 $v_1,\cdots,v_m$ をとって同じことをすれば，まず $v_1,\cdots,v_m$ の上の一般多項式の全体を T' とすれば T と T' とは同型になっている．すなわち同じものと思ってもさしつかえない．この同型から明らかに $u_1,\cdots,u_m$ から作られた Clifford 代数と $v_1,\cdots,v_m$ から作られた Clifford 代数の同型が得られる．

次はここでやっていることを §10 の表現でいえば

$$u^2 = B(u,u)$$

という新しい計算規則を導入して T から得られる代数を Clifford 代数という，ということになっている．

逆に §10 において一般多項式の全体 $\tilde{\mathcal{U}}$ から包絡代数 $\mathcal{U}$ を導いたところは，以前の表現でいえば

$$[x,y] = \sum_i a_i h_i + \sum_\alpha b_\alpha x_\alpha + \sum_\alpha c_\alpha y_\alpha$$

という新しい演算規則を導入したのであるが，いまの流儀で定義すれば

$$[x,y] - (\sum_i a_i h_i + \sum_\alpha b_\alpha x_\alpha + \sum_\alpha c_\alpha y_\alpha)$$

で生成された $\tilde{\mathcal{U}}$ のイデアルを I として $\tilde{\mathcal{U}}/I$ を $\mathcal{U}$ と定義するといえばよいのである．もっと詳しくいえば I は次の形の $\tilde{\mathcal{U}}$ の元の有限和の全体になっている：

$$u([x,y] - (\sum_i a_i h_i + \sum_\alpha b_\alpha x_\alpha + \sum_\alpha c_\alpha y_\alpha))u'$$

ここに u と u' は $\tilde{\mathcal{U}}$ の任意の元である．

Clifford 代数について話を進める前に，ここで代数学の用語を用いて，外積代数の定義をすることにする．V を複素線形空間で，$u_1,\cdots,u_m$ をその基底とする．$u_1,\cdots,u_m$ の一般多項式の全体を T とする．

いま T のイデアル I を次の集合から生成された T のイデアルとする：

$$\{uu \mid u \in V\}$$

もっと正確にいえば I は次の形の T の元の有限和の全体になっている：

$$tuut'$$

ここに t,t' は T の任意の元で，x は V の任意の元である．この形の有限和の全体が T のイデアルになっていることは明らかであろう．

T/I によってできる C の上の代数を，V の外積代数といって $\Lambda(V)$ で表す．明らか

に外積代数は Clifford 代数の対称双一次形式 B が0になった場合，すなわち

$$B(u,v)=0 \qquad (\text{すべての } u,v\in V \text{ について})$$

が成立する特別な場合になっている．すなわち一番簡単な Clifford 代数が外積代数になっている．したがってもちろん $\Lambda(V)$ は V の基底の取り方によらない．もっと詳しくいえば別な基底をとっても同型な代数が得られるだけである．

さて外積代数 $\Lambda(V)$ の性質を調べていくことにする．まず上のイデアル I の元のなかに含まれる単項式はすべて2次以上であるから，T の0次の項と1次の項とはそのまま同型に $\Lambda(V)$ のなかに含まれる．すなわち $\boldsymbol{C}$ と V とはそのまま同型に $\Lambda(V)$ のなかに入っているとしてよい．したがって $\boldsymbol{C}$ の元と V の元とは $\Lambda(V)$ のなかでも同じ文字を用いて表すことにする．

外積代数での積を $\wedge$ で表すことにする．すなわち $A,B\in\Lambda(V)$ とするとき，A と B との $\Lambda(V)$ の積を $A\wedge B$ で表すことにする．$\Lambda(V)$ は代数であるから $\wedge$ について次の性質がみたされることは明らかである：

$$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$$

$$(A+B)\wedge C=A\wedge C+B\wedge C, \qquad A\wedge(B+C)=A\wedge B+A\wedge C$$

$$(aA)\wedge C=A\wedge(aC)=a(A\wedge C) \qquad (\text{ここに } a\in \boldsymbol{C})$$

さてイデアルでの外積代数の定義を，計算規則の導入として定義すれば外積代数は一般多項式 T で積を $\wedge$ で表し，次の計算規則を導入して得られる代数である：

$$v\in V \quad \text{ならば} \quad v\wedge v=0$$

いま $u,v\in V$ とする．上の式から直ちに

$$0=(u+v)\wedge(u+v)=u\wedge u+u\wedge v+v\wedge u+v\wedge v$$
$$=u\wedge v+v\wedge u$$

が得られるから，次の式が得られる：

$$u,v\in V \quad \text{ならば} \quad v\wedge u=-u\wedge v$$

$\Lambda(V)$ の元は T の元から得られるから，$\Lambda(V)$ の任意の元は複素数か次の形の有限和になっている．

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_n \qquad (\text{ここに } v_1,\cdots,v_n\in V)$$

いま V の基底を $u_1,\cdots,u_m$ として $v_i=\sum a_{ij}u_j$ と表せば，$v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ は次の形の有限和で表されることがわかる：

$$au_i\wedge\cdots\wedge u_{i_n}$$

ここに $a \in C$ で $u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}$ は $u_1, \cdots, u_m$ のいずれかである．したがって以下では

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$$

の形をもう少し調べることにする．もしこの形が

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_j \wedge u_k \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$$

の形であって $k < j$ であれば $u_j \wedge u_k = -u_k \wedge u_j$ を用いて

$$-u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_k \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$$

の形に直すことができる．したがって上の形は

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n} \qquad (i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n)$$

の形になっているとしてよい．ところでこれがもし

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_j \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$$

の形になっているとすれば $u_j \wedge u_j = 0$ を用いて0となるから，この形はすべて

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n} \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$$

がみたされているものとしてよい．これから $n \leq m$ であることがわかる．

以上で $\Lambda(V)$ のすべての元は $\sum a_{i_1 \cdots i_n} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$ の形に表されることがわかった．ここで $\sum$ は $i_1 < \cdots < i_n$ となるすべての組の和である．$n = 0$ のときはこれは a だけすなわち複素数を表すものとする．

いまこの表し方がただ一通りであることをいうことにする．このためには $\sum a_{i_1 \cdots i_n} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$ $(i_1 < \cdots < i_n)$ の形に表したものが0であるためにはすべての $a_{i_1 \cdots i_n}$ が0でなければならないことをいえばよい．

ところで $\Lambda(V)$ は $u_1, \cdots, u_m$ の一般多項式全体の代数で積を $\wedge$ で表し，$v \wedge u = -u \wedge v$ $(u, v \in V)$ という新しい計算規則を導入してできたものである．ところで $x = \sum a_i x_i$, $y = \sum b_i x_i$ とかいて上の式をかき直してみれば，これは次の計算規則を導入してできたものと思ってよい：

$$u_i \wedge u_j = -u_j \wedge u_i \qquad (1 \leq i, j \leq m)$$

ところでこの計算規則の導入で $\sum a_{i_1 \cdots i_n} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$ $(i_1 < \cdots < i_n)$ が0になるのはすべての $a_{i_1 \cdots i_n} = 0$ の場合に限ることは明らかであるから求める命題は証明された．

いま $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$ $(i_1 < \cdots < i_n)$ の形を $\Lambda(V)$ の n 次の単項式という．$\Lambda(V)$の元が n 次の単項式の一次結合で表されるときに，その元を n 次であるという．$\Lambda(V)$ の n 次の元の全体を $\Lambda^n(V)$ で表すことにする．明らかに $\Lambda(V)$ は $\Lambda^0(V) \oplus \Lambda^1(V) \oplus \cdots \oplus$

$\Lambda^m(V)$ と表される．ここに$\oplus$は複素線形空間としての直和を表しており，$\Lambda^0(V) = \boldsymbol{C}$ とする．$\Lambda^p(V)$ の次元は明らかに

$$\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

である．したがって $\Lambda(V)$ の次元は 2^m になっている．

いま V と V' と2つの複素線形空間を考えて，$f: V \longrightarrow V'$ を複素線形写像とする．このとき $a \in \boldsymbol{C}$ のときは $F(a) = a$, $v \in V$ のときは $F(v) = f(v)$ をみたすような準同型写像

$$F: \quad \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(V')$$

がただ一通り作れることは明らかであろう．ここで準同型写像というのは複素線形写像で次の条件をみたすものである：

$$F(A \wedge B) = F(A) \wedge F(B)$$

いま特別な場合 $V = V'$ として V の基底 $u_1, \cdots, u_m$ を固定して f が行列 A で表されるものとする．このとき

$$F(u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) = \det(A)\, u_1 \wedge \cdots \wedge u_m$$

になることは計算から容易に確かめることができる．

いま，g を V の上の線形汎関数とする．すなわち $g: V \longrightarrow \boldsymbol{C}$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\delta_g(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n}) = g(u_{i_1})u_{i_2} \wedge \cdots \wedge u_{i_n} - g(u_{i_2})u_{i_1} \wedge u_{i_3} \wedge \cdots \wedge u_{i_n} + \cdots \\ + (-1)^{k-1} g(u_{i_k})u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_{k-1}} \wedge u_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge u_{i_n} + \cdots \\ + (-1)^{n-1} g(u_{i_n})u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_{n-1}}\end{aligned}$$

と定義して δ_g を $\Lambda(V)$ の上に線形によって拡大することにする．ここで $a \in \boldsymbol{C}$ については $\delta_g(a) = 0$ と定義するのである．

いま g と g' とが共に V の線形汎関数で $a, b \in \boldsymbol{C}$ とすれば次の式が成立する：

$$\delta_{ag} = a\delta_g, \qquad \delta_{g+g'} = \delta_g + \delta_{g'}$$

$$\delta_g\delta_{g'} + \delta_{g'}\delta_g = 0, \qquad \delta_g{}^2 = 0$$

ここで $\delta_g\delta_{g'} + \delta_{g'}\delta_g = 0$ 以外は明らかであろう．この式は実際に $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n}$ に施してみれば明らかである．

さてここで §16 で定義した記号 $[v_1, \cdots, v_r]$ と外積代数との関係についてのべることにする．

このため V の基底を $u_1, \cdots, u_m$ として，$u_1, \cdots, u_m$ の一般多項式の全体を T とした

ときに，T から $\Lambda(V)$ への自然な写像を h で表すことにする．すなわち

$$h:\quad T \longrightarrow \Lambda(V) \qquad h(a) = a, \quad h(u) = u$$

となっている．もちろん $h(tt') = h(t) \wedge h(t')$ となる．このとき $V \otimes \cdots \otimes V$ は T の部分線形空間と考えることができる．このとき $[v_1, \cdots, v_r]$ は

$$\begin{array}{ccc} V \otimes \cdots \otimes V & \longrightarrow & T \\ & \searrow & \downarrow h \\ & & \Lambda(V) \end{array}$$

$$h([v_1, \cdots, v_r]) = r!\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$$

をみたしている．したがって実質的には外積代数を考えることになっている．

さてここで Clifford 代数に戻ることにする．すなわち V はいままで通り $u_1, \cdots, u_m$ を基底とする複素線形空間だが，B は V の上の対称双一次形式で，I は $\{u^2 - B(u, u) | u \in V\}$ によって生成されたイデアル，T を $u_1, \cdots, u_m$ から作られた一般多項式の全体，C を T/I によって作られた Clifford 代数とする．

いま C' を C の上の代数で1をもっているものとする．ここで1は C' の任意の元 y について

$$y \cdot 1 = 1 \cdot y = y$$

をみたすものである．C' が1をもっているときには $a \in C$ に対して $a \cdot 1$ を a とかくことにすれば C が C のなかに埋め込まれるから，$C \subseteq C'$ と考えてよい．いま C' の複素線形部分空間 V' と複素線形写像 $\varphi: V \longrightarrow V'$ で次の条件をみたすものが存在したとする：

$$u \in V \quad \text{ならば} \qquad (\varphi(u))^2 = B(u, u)$$

このとき φ を $\Phi: T \longrightarrow C'$ という準同型に一意的に拡大することができる．いまこのように拡大した Φ については，$u \in V$ とすれば

$$\Phi(u \cdot u - B(u, u)) = \varphi(u)^2 - B(u, u) = 0$$

となる．したがって $\Phi^{-1}(0) = \{t \in T | \Phi(t) = 0\}$ を考えればこれは I を含んでいる．すなわち $I \subseteq \Phi^{-1}(0)$，いま T から C への自然な写像を $\pi: T \longrightarrow C$ とすれば，この事実は Φ を C から C' のなかの準同型と考えてよいことがわかる．すなわち $\phi: C \longrightarrow C'$ なる準同型で $\Phi = \phi \circ \pi$ で V の上では ϕ はちょうど φ になっている．

以上をまとめて次の補題を得る．

補題 1. C' を C の上の代数として，$\varphi: V \longrightarrow C'$ を複素線形写像で

$$v \in V \quad \text{ならば} \quad (\varphi(v))^2 = B(v, v)$$

をみたすものとする．このとき C を V と B とから作られた Clifford 代数とすれば，φ は C から C' への準同型に拡大することができる．さらにもし $\varphi(V)$ が C' を生成すれば φ は C から C' の上への準同型である．すなわち $\varphi(C) = C'$ となっている．▯

さて M の任意の m 次元複素線形空間とする．このとき M から M のなかへの複素線形写像の全体を $\mathcal{M}$ とすれば $\mathcal{M}$ は再び代数になっている．これは $m \times m$ 型の行列の全体が代数になっているということであるから明らかであるが，念のために定義をかけば，

$h_1, h_2 \in \mathcal{M}$（すなわち $h_1, h_2 : M \longrightarrow M$ なる複素線形写像）で $a \in \boldsymbol{C}$ としたとき，$\mathcal{M}$ は次のように $h_1 \cdot h_2, h_1 + h_2, ah_1$ を定義してできる代数である：

$$(h_1 \cdot h_2)(u) = h_1(h_2(u)), \qquad (h_1 + h_2)(u) = h_1(u) + h_2(u) \qquad (ah_1)(u) = ah_1(u)$$

ここで $u \in M$ とする．

さて以上を Clifford 代数に用いることにする．$u_1, \cdots, u_m$ は V の基底，C は V の上の双一次形式 B から作られる Clifford 代数，$\Lambda(V)$ は V から作られる外積代数，$\mathcal{E}$ は $\Lambda(V)$ から $\Lambda(V)$ への複素線形写像全体が作る代数とする．

いま $u \in V$ とすれば $g_u(v) = B(u, v)$ によって g_u を定義すれば g_u は V の複素線形汎関数である．したがって以前に定義したように δ_{g_u} が定義される．これを δ_u とかくことにする．すなわち次の式が成立する：

$$v \in V \implies \delta_u(v) = B(u, v)$$

いま，さらに $x \in \Lambda(V)$ として L_u を

$$L_u(x) = u \wedge x$$

によって定義して，さらに L_u' を

$$L_u' = L_u + \delta_u$$

によって定義する．

L_u' は明らかに $\mathcal{E}$ の元である．いま

$$\varphi: \quad V \longrightarrow \mathcal{E}$$

を $\varphi(x) = L_u'$ で定義すれば，φ は V から $\mathcal{E}$ への複素線形写像になっている．

いま $u \in V$ とすれば，明らかに $\delta_u{}^2 = 0$ であって，$x = u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n} \in \Lambda(V)$ とすれば

$$\begin{aligned}(L_u\delta_u + \delta_u L_u)x &= L_u(\delta_u(x)) + \delta_u(L_u(x)) \\ &= L_u(\sum_k(-1)^{k-1}B(u,u_{i_k})u_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{u}_{i_k}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}) \\ &\quad + \delta_u(u\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}) \\ &= \sum_k(-1)^{k-1}B(u,u_{i_k})u\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{u}_{i_k}\wedge\cdots\wedge u_{i_n} \\ &\quad + B(u,u)u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n} \\ &\quad + \sum_k(-1)^k B(u,u_{i_k})u\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{u}_{i_k}\wedge\cdots\wedge u_{i_n} \\ &= B(u,u)u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n} = B(u,u)x\end{aligned}$$

となる. ここに $\hat{u}_{i_k}$ は u_{i_k} の個所が抜けていることを示すものとする. 以上をかけば

$$L_u\delta_u + \delta_u L_u = B(u,u)$$

となっている.

一方 $u\wedge u=0$ であるから, $L_u^2=0$ である. これから $L_u'^2=B(u,u)$ が次の計算によって得られる：

$$\begin{aligned}(L_u+\delta_u)(L_u+\delta_u) &= L_u^2 + L_u\delta_u + \delta_u L_u + \delta_u^2 \\ &= L_u\delta_u + \delta_u L_u = B(u,u)\end{aligned}$$

ここで補題1を用いれば,

$$\phi:\quad \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

なる準同型 ϕ で L_u' の拡大になっているものが存在する. すなわち次の式が成立する：

$$u\in V \implies \phi(\pi(u)) = L_u'$$

ここに $\pi(u)$ は u を代表元とする $\mathcal{C}$ の元を表すものとする.

いま $u\in V$ とすれば $\delta_u\cdot 1=0$ であるから $L_u'\cdot 1=u$ となる. すなわち u に L_u'を対応させる写像は V から $\mathcal{E}$ への1対1の写像になっていることがわかる. これから π も1対1の写像になっていることがわかる. すなわち $\pi: V\longrightarrow \mathcal{C}$ は同型写像であるから V 自身が $\mathcal{C}$ のなかに埋め込まれているものと今後考えることにする. すなわち V は $\mathcal{C}$ の線形部分空間になっている. 別の言葉でいえば上の π を $\pi(u)=u$ だと思ってもよいということになる. この記号を用いれば $\mathcal{C}$ のなかで次の式が成立する：

$$u\in V \implies u^2 = B(u,u)$$

$$u\in V \implies \phi(u) = L_u'$$

さて $x\in\mathcal{C}$ とすれば $\phi(x)\in\mathcal{E}$, ところで $1\in\Lambda(V)$ であるから

$$\theta(x) = \phi(x)\cdot 1$$

を定義すれば, θ は $\mathcal{C}$ を $\Lambda(V)$ のなかへ移す複素線形写像

$$\theta: \quad \mathcal{C} \longrightarrow \Lambda(V)$$

になっている．いま一般に $h \in \mathcal{E}$ とするとき，h が $\Lambda^n(V)$ を $\Lambda^{n+d}(V)$ のなかに移すとき，h を d 次の $\mathcal{E}$ の元であるという．明らかに L_u は1次の元であり，δ_u は -1 次の元である．$h_1, \cdots, h_r$ がそれぞれ $d_1, \cdots, d_r$ 次の元であれば $h_1 \cdots h_r$ は $d_1 + \cdots + d_r$ 次の元になっている．

いま $u_1, \cdots, u_n \in V$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\psi(u_1 \cdots u_n) &= (L_{u_1} + \delta_{u_1}) \cdots (L_{u_n} + \delta_{u_n}) \\ &= L_{u_1} \cdots L_{u_n} + \sum_{d=-n}^{n-1} h_d\end{aligned}$$

でここに h_d は d 次の $\mathcal{E}$ の元になっている．これから

$$\theta(u_1 \cdots u_n) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_n + \sum_{d=0}^{n-1} x_d$$

となって，ここに x_d は $\mathcal{C}$ の d 次の元（すなわち T の d 次の元を代表元とする元）になっている．いま

$$F_n = \sum_{d<n} \Lambda^d(V)$$

とおけば，上の式から次の式が得られる：

$$\Lambda^n(V) \subseteq \theta(\mathcal{C}) + F_n$$

これから直ちに $F_0 = \{0\}$ であり，すべての n について

$$\Lambda^n(V) \subseteq \theta(\mathcal{C})$$

がでてきて，$\Lambda(V) = \theta(\mathcal{C})$ であることがわかった．すなわち $\mathcal{C}$ の次元は少なくとも $\Lambda(V)$ の次元すなわち 2^m であることがわかった．これを用いて次の補題を証明する．

補題 2. $u_1, \cdots, u_m$ を V の基底とすれば，$u_{i_1} \cdots u_{i_n}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$ の全体が $\mathcal{C}$ の基底を成す．すなわち $\mathcal{C}$ の次元は 2^m である．

［証明］ 最初に $u_{i_1} \cdots u_{i_n}$ で $n = 0$ のときは1を意味することを断っておく．次に $n \geq 0$ とするとき，C_n を $u_{i_1} \cdots u_{i_n}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$ の形の元から張られる $\mathcal{C}$ の複素線形部分空間と定義し，D_n を

$$D_n = \sum_{r \leq n} C_r$$

によって定義する．したがって $C_0 = D_0 = \boldsymbol{C}$ で $C_1 = V$ となる．まず次のことを証明する．

$u_i u_{i_1} \cdots u_{i_n}$ は次の条件をみたす $u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_{n'}}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_{n'})$ の一次結合で表される．

ここに $n' \leq n+1$ であって $j_1 \geq \min(i, i_1)$ をみたすものとする.

この命題は $n=0$ のときは明らかである. したがって $n-1$ のときには証明されたとして n のときを証明する.

まず $i<i_1$ とすれば $u_i u_{i_1} \cdots u_{i_n}$ 自身が上の $u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_{n'}}$ の条件をみたすからよい.

次に $i=i_1$ とすれば $u_i u_{i_1} \cdots u_{i_n} = B(u_i, u_i) u_{i_2} \cdots u_{i_n}$ となるからやはりよい. したがっていま $i_1<i$ とする. このとき

$$
\begin{aligned}
u_i u_{i_1} + u_{i_1} u_i &= (u_i + u_{i_1})(u_i + u_{i_1}) - u_i{}^2 - u_{i_1}{}^2 \\
&= B(u_i + u_{i_1}, u_i + u_{i_1}) - B(u_i, u_i) - B(u_{i_1}, u_{i_1}) \\
&= 2B(u_i, u_{i_1})
\end{aligned}
$$

であるから, 次の式が成立する:

$$
u_i u_{i_1} \cdots u_{i_n} = 2B(u_i, u_{i_1}) u_{i_2} \cdots u_{i_n} - u_{i_1} u_i u_{i_2} \cdots u_{i_n}
$$

ここで $u_{i_2} \cdots u_{i_n}$ は上の $u_{j_1} \cdots u_{j_{n'}}$ の条件をみたしているから, $u_i u_{i_2} \cdots u_{i_n}$ に対しては帰納法の仮定を用いれば, $u_{i_1} u_i u_{i_2} \cdots u_{i_n}$ も上の条件をみたす $u_{j_1} \cdots u_{j_{n'}}$ の一次結合で表されることがわかる.

この証明されたことから, すべての i について

$$
x_i D_m \subseteq D_m
$$

したがって, すべての $x \in V$ について $xD_m \subseteq D_m$ になることがわかる. したがってすべての $x \in C$ について $x D_m \subseteq D_m$ となる. また $1 \in D_m$ であるからこれは

$$
C = D_m
$$

を意味する. ところで C は補題 2 によって少なくとも 2^m 次元であるから, $u_{i_1} \cdots u_{i_n} (i_1 < \cdots < i_n)$ の全体がちょうど C の基底になっていることがわかった. ■

系　V_0 を V の複素線形部分空間として, V の対称双一次形式 B を V_0 に制限したものを B_0 とする. いま C を B から作られた Clifford 代数, C_0 を B_0 から作られた Clifford 代数とすれば, C_0 は C のなかで V_0 の元から生成された部分代数に同型になっている.

［証 明］ V の基底 $u_1, \cdots, u_m$ を上手にとって $u_1, \cdots, u_n$ までがちょうど V_0 の基底になっているようにすれば, 補題 2 から明らかである. ■

ここで今後の方針についてのべることにする. まず我々は計算だけによって必要な結果を導くことにする. しかしこの計算で得たものは余りその内容を伝えてくれない. したが

ってそのあとでこの計算とは独立にやや数学的なしかし内容を伝えてくれる理論 'Clifford 代数の理論' 'Clifford 代数のスピン表現' '$\mathfrak{o}(V, B)$ のスピン表現' の3つを展開する．そのあとで '具体的なスピン表現' を再びほとんど独立に展開する．したがって重複した内容が3つの異なった形でのべられている．読者は趣味に合ったものを選ばれたい．

さて C の2元 x, y について $x \circ y$ と $[x, y]$ とを次の式で定義する：

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx), \qquad [x, y] = xy - yx$$

前に計算したように $u, v \in V$ については次の式が成立する：

$$u \circ v = B(u, v)$$

いま $v_1, \cdots, v_n \in V$ とするとき $[v_1, \cdots, v_n] \in C$ を次のように帰納的に定義する：

$$[v_1] = v_1$$
$$[v_1, \cdots, v_{2k-1}, v_{2k}] = [[v_1, \cdots, v_{2k-1}], v_{2k}]$$
$$[v_1, \cdots, v_{2k}, v_{2k+1}] = [v_1, \cdots, v_{2k}] \circ v_{2k+1}$$

この定義について次の補題が成立する．

補題 3. いま $v_1, \cdots, v_n \in V$ とするとき，$v_1, \cdots, v_n$ のなかに同じものが少なくとも2回現れれば $[v_1, \cdots, v_n] = 0$ となる．$(i_1, \cdots, i_n)$ を $(1, 2, \cdots, n)$ の置換とすれば

$$[v_{i_1}, \cdots, v_{i_n}] = \pm[v_1, \cdots, v_n]$$

となる．ここで $(i_1, \cdots, i_n)$ が偶置換ならば $+$，奇置換ならば $-$ をとるものとする．

［証 明］ まず補題の最初の命題が証明されたとすれば

$$\begin{aligned} 0 &= [\cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots] \\ &= [\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots] + [\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots] \end{aligned}$$

となるから i 番目の項と j 番目の項を取り換えれば－がつくことがわかり，それから後の命題は明らかに成立する．したがって最初の命題を帰納法で証明することにする．

$[v, v] = 0$ は明らかであるから，$n > 2$ として $v_k = v = v_l$ で $1 \leq k < l \leq n$ とする．もし $l < n$ とすれば $[v_1, \cdots, v_l] = 0$ が帰納法の仮定から得られ，$[\ , \cdots,]$ の定義から $[v_1, \cdots, v_n] = 0$ がでてくる．したがって $l = n$ とする．また帰納法の仮定から $[v_1, \cdots, v_{n-1}] = \pm[\ , \cdots, v]$ の形でかけるから $[v_1, \cdots, v_{n-2}, v, v] = 0$ をいえばよい．n が偶数の場合と奇数の場合に分ければ，$x \in C$ として $[x \circ v, v] = 0$ と $[x, v] \circ v = 0$ の2つを証明すれば十分である．これは次の計算で証明される：

$$\left[\frac{1}{2}(xv + vx), v\right] = \frac{1}{2}(xv^2 + vxv - vxv - v^2x)$$

$$= \frac{1}{2}(xv^2 - v^2x) = \frac{1}{2}B(v,v)x - \frac{1}{2}B(v,v)x = 0$$

$$[x,v] \circ v = \frac{1}{2}(xv - vx)v + \frac{1}{2}v(xv - vx)$$

$$= \frac{1}{2}xv^2 - \frac{1}{2}v^2x = 0 \qquad \blacksquare$$

補題 4. V の次元を m として，$\tilde{V}_n$ を $[v_1, \cdots, v_n]$ の形の元で張られる C の複素線形部分空間とする．ここに $0 \leq n \leq m$ で $v_1, \cdots, v_n \in V$ とする．また $\tilde{V}_0 = \boldsymbol{C}$ とする．このとき $\tilde{V}_n$ の複素次元は $\binom{m}{n}$ であり，C は $\tilde{V}_0, \cdots, \tilde{V}_m$ の直和になっている．すなわち

$$C = \boldsymbol{C} \oplus \tilde{V}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{V}_n$$

［証 明］ $u_1, \cdots, u_m$ を V の基底とする．明らかに $\tilde{V}_n$ の元は $[u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}]$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$ の一次結合で表される．B は $\boldsymbol{C}$ の上の対称双一次形式であるから，基底 $u_1, \cdots, u_m$ で $B(u_i, u_j) = 0$ $(i \neq j)$ となるものがある．いま $u_1, \cdots, u_m$ はそのようなものとする．このとき

$$i \neq j \implies u_i u_j = -u_j u_i$$

が成立する．したがって $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ とすれば

$$(u_{i_1} \cdots u_{i_{n-1}}) u_{i_n} = \pm u_{i_n} (u_{i_1} \cdots u_{i_{n-1}})$$

となる．ここで $\pm$ は n が奇数ならば $+$，偶数ならば $-$ をとるものとする．したがって n が偶数ならば

$$[u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}] = [[u_{i_1}, \cdots, u_{i_{n-1}}], u_{i_n}]$$
$$= [u_{i_1}, \cdots, u_{i_{n-1}}] u_{i_n} - u_{i_n} [u_{i_1}, \cdots, u_{i_{n-1}}]$$

n が奇数ならば

$$[u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}] = \frac{1}{2}([u_{i_1}, \cdots, u_{i_{n-1}}] u_{i_n} + u_{i_n} [u_{i_1}, \cdots, u_{i_{n-1}}])$$

となるから n についての帰納法で

$$[u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}] = 2^k u_{i_1} \cdots u_{i_n}$$

となる k が存在することがわかる．したがって $[u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}]$ $(i_1 < \cdots < i_n)$ の全体が C の基底であることがわかり，補題が証明された．$\blacksquare$

さて $v_1, v_2, v_3 \in V$ とすれば

$$(v_1 \circ v_2) \circ v_3 - v_1 \circ (v_2 \circ v_3) = B(v_1, v_2) v_3 - B(v_2, v_3) v_1$$

また一方

$$
\begin{aligned}
(v_1 \circ v_2) \circ v_3 - v_1 \circ (v_2 \circ v_3) &= \frac{1}{4}(v_1 v_2 + v_2 v_1) v_3 + \frac{1}{4} v_3 (v_1 v_2 + v_2 v_1) \\
&\quad - \frac{1}{4} v_1 (v_2 v_3 + v_3 v_2) - \frac{1}{4}(v_2 v_3 + v_3 v_2) v_1 \\
&= \frac{1}{4}(v_1 v_2 v_3 + v_2 v_1 v_3 + v_3 v_1 v_2 + v_3 v_2 v_1 \\
&\quad - v_1 v_2 v_3 - v_1 v_3 v_2 - v_2 v_3 v_1 - v_3 v_2 v_1) \\
&= \frac{1}{4}[v_2, [v_1, v_3]]
\end{aligned}
$$

となるから，次の等式が得られた：

$$\frac{1}{4}[[v_1, v_3], v_2] = B(v_2, v_3) v_1 - B(v_1, v_2) v_3$$

この式を用いて次の定理を証明することにする．

定理 1． $\tilde{V}_2$ は［，］で閉じている．すなわち

$$t,\ w \in \tilde{V}_2 \implies [t, w] \in \tilde{V}_2$$

もし B が非退化な対称双一次形式ならば，$\tilde{V}_2$ は $\mathfrak{o}(m, C)$ に同型なリー代数になっている．

［証明］ $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ として $[[v_1, v_2], [v_3, v_4]]$ が V_2 の元になっていることをいえばよい．これは

$$
\begin{aligned}
[[v_1, v_2], [v_3, v_4]] &= [v_3, [[v_1, v_2], v_4]] - [v_4, [[v_1, v_2], v_3]] \\
&= 4B(v_4, v_2)[v_3, v_1] - 4B(v_1, v_4)[v_3, v_2] \\
&\quad + 4B(v_1, v_3)[v_4, v_3] - 4B(v_3, v_2)[v_4, v_1]
\end{aligned}
$$

となるから明らかである．さらにこのことから $V + \tilde{V}_2$ がやはり［，］について閉じていることも明らかである．

いま $\tilde{V}_2$ の表現 (ρ, V) を次のように定義する．

ρ の定義は $[v_1, v_2]$ $(v_1, v_2 \in V)$ なる形についてすればあとは線形で拡大できるから十分である．

$$\rho([v_1, v_2]) v = 4B(v_1, v) v_2 - 4B(v_2, v) v_1$$

いま B は C の上の非退化な対称双一次形式であるから V の基底 $u_1', \cdots, u_m'$ を上手にとれば

$$B(u_i', u_j') = \delta_{ij}$$

が成立するようにできる．このとき $\mathfrak{o}(m, C)$ の元を $u_1', \cdots, u_m'$ を用いて行列の形で表せば $X + {}^tX = 0$ をみたす行列になっている．ところで上の形は $v = \sum a_k u_k'$，$v_1 =$

$u_i', v_2 = u_j'$ とおけば

$$\rho([u_i', u_j'])v = 4\,a_i u_j' - 4\,a_j u_i'$$

となっているから $\rho([u_i', u_j'])$ を行列の形にかけば

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \end{array}\begin{pmatrix} & i & & j & \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots & -4 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 4 & \cdots\cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

(i,j) のところが -4 で (j,i) のところが 4 であとは全部 0

の形になっている．すなわち $\rho([u_i', u_j'])$ が $\mathfrak{o}(m, C)$ に属することは明らかである．したがってすべての $v_1, v_2 \in V$ について $\rho([v_1, v_2]) \in \mathfrak{o}(n, C)$ は明らかである．逆にすべての $\mathfrak{o}(m, C)$ は上の形の一次結合で表されるから，ρ による $\tilde{V}_2$ の像がちょうど $\mathfrak{o}(m, C)$ になっていることがわかる．ところで $\tilde{V}_2$ も $\mathfrak{o}(m, C)$ も共に $\binom{m}{2}$ 次元であるから，この ρ は同型写像になっている．■

C のなかで $C + \tilde{V}_2$ によって生成される部分代数を C^+ とかくことにする．上に作った V の基底 $u_1', \cdots, u_m'$ を考えれば，$u_i'u_j'$ $(i<j)$ の全体が $\tilde{V}_2$ の基底になっている．

$u_i'^2 = 1$ で $u_i'u_j' = -u_j'u_i'$ $(i \neq j)$ であるから，$u_{i_1}'u_{i_2}'\cdots u_{i_{2r}}'$ $\left(i_1 < i_2 < \cdots < i_{2r},\ r = 0, 1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ の全体が C の部分代数になっており，$\tilde{V}_2$ はこのなかに含まれるから C^+ がこの部分代数のなかに含まれている．したがって C^+ がちょうどこの部分代数になっていることは明らかである．C^+ は B から作られる第 2 Clifford 代数と呼ばれる．

C^+ の次元は $1 + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \cdots$ で計算されるが

$$\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m-1 \\ k \end{pmatrix}$$

の公式を用いれば，C^+ の次元が 2^{m-1} であることがわかる．

次に $m = 2l+1$ の場合を考えることにする．さて以下に前節の F として

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_l \\ 0 & E_l & 0 \end{pmatrix}$$

をとることにする．さらに $u_1, \cdots, u_m$ をこの行列を考えるときの基底ととれば，

$$B(u_1, u_1) = 1$$

$$B(u_i, u_{l+i}) = B(u_{l+i}, u_i) = 1 \qquad (i = 2, \cdots, l+1)$$

であってそれ以外の i, j の組については $B(u_i, u_j)=0$ となっている.

いま v_i と w_i $(i=1,\cdots,l)$ を次の式で定義する：

$$v_i = u_1 u_{i+1}, \qquad w_i = u_1 u_{i+l+1}$$

このとき明らかに v_i, w_i $(i=1,\cdots,l)$ は C^+ を生成する. そのうえ $i \neq j$ とすれば次の式が成立する.

$$\begin{aligned} v_i v_j &= u_1 u_{i+1} u_1 u_{j+1} \\ &= -u_1 u_{i+1} u_{j+1} u_1 + 2B(u_1, u_{i+1}) u_1 u_{j+1} \\ &= -u_1 u_{j+1} u_{i+1} u_1 - 2B(u_{i+1}, u_{j+1}) u_1{}^2 \\ &= -u_1 u_{j+1} u_1 u_{i+1} + 2B(u_1, u_{i+1}) u_1 u_{j+1} \\ &= -v_j v_i \end{aligned}$$

同様の計算によって次の式が成立する：

$$v_i{}^2 = 0, \qquad w_i{}^2 = 0$$

$$w_i w_j = -w_j w_i \qquad (i \neq j)$$

したがって $v_1, \cdots, v_l$ から生成される代数は C^l の外積代数と同型になる. 同様に $w_1, \cdots, w_l$ から生成される代数も C^l の外積代数と同型になる.

C^+ の基底は次の形のものの全体となる：

$$w_{j_1} \cdots w_{j_s} v_{i_1} \cdots v_{i_r} \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_r,\ j_1 < j_2 < \cdots < j_s)$$

さらに上の計算と同様の計算を繰り返せば次の式が得られる：

$$v_i w_i + w_i v_i = -2$$

$$v_i w_j = -w_j v_i \qquad (i \neq j)$$

いま我々の目的とする複素線形空間 U を C^+ のなかで次の形の元から張られるものとする：

$$w_{i_1} \cdots w_{i_r} v_1 \cdots v_l \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$$

明らかに U は 2^l 次元であり, C^+ の元 x を U の元に左から掛ければ, 再び U の元が得られる. すなわち x を左から掛ける操作は $\mathfrak{gl}(U)$ の元を与える. この元を $\rho(x)$ で表すことにする. このとき

$$\rho: \quad C^+ \longrightarrow \mathfrak{gl}(U)$$

は同型写像になっている. これは C^+ と $\mathfrak{gl}(U)$ とが共に 2^{2l} 次元であるから, ρ が 1 対 1 になっていることをいえばよい. これは $w_{j_1'} \cdots w_{j_s'} v_{i_1'} \cdots v_{i_m'}$ を $w_{i_1} \cdots w_{i_r} v_1 \cdots v_l$ に左から掛けてみれば,

(i)　$\{i_1', \cdots, i_m'\} \subseteq \{i_1, \cdots, i_r\}$　でなければ　0

(ii)　$\{i_1', \cdots, i_m'\} \subseteq \{i_1, \cdots, i_r\}$　でも

$$\{j_1', \cdots, j_s'\} \cap (\{i_1, \cdots, i_r\} - \{i_1', \cdots, i_m'\}) \neq \phi \quad \text{ならば} \quad 0$$

(iii)　$\{i_1', \cdots, i_m'\} \subseteq \{i_1, \cdots, i_r\}$　で

$$\{j_1', \cdots, j_s'\} \cap (\{i_1, \cdots, i_r\} - \{i_1', \cdots, i_m'\}) = \phi$$

ならば $w_{i_1''}\cdots w_{i_k''}v_1\cdots v_l$ の整数倍が得られる．ここに $i_1''\cdots i_k''$ は $i_1''<\cdots<i_k''$ であって次の式をみたすものとする：

$$\{i_1'', \cdots, i_k''\} = \{j_1', \cdots, j_s'\} \cup (\{i_1, \cdots, i_r\} - \{i_1', \cdots, i_m'\})$$

これらの性質をみたすことは明らかであるから，容易に証明することができる．

さて $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のスピン表現を定義する．上に定義した $\tilde{V}_2$ は $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ と同型であるから $\tilde{V}_2$ の表現を定義すればよい．このスピン表現を (ρ, U) によって定義する．ここで ρ は実は上の ρ を $\tilde{V}_2$ に制限したものであるが同じ ρ を用いることにする．

さて前節で調べたように

$$X_i = E_{i+1, i+2} - E_{l+i+2, l+i+1} \qquad (i<l)$$

$$H_i = E_{i+1, i+1} - E_{l+i+1, l+i+1} - E_{i+2, i+2} + E_{l+i+2, l+i+2} \qquad (i<l)$$

$$X_l = E_{1, 2l+1} - E_{l+1, 1}$$

$$H_l = 2(E_{l+1, l+1} - E_{2l+1, 2l+1})$$

である．これに V_2 のどのような元が対応するかを考える．

$$\rho([u_i, u_j])u_k = 4B(u_i, u_k)u_j - 4B(u_j, u_k)u_i$$

で $B(u_1, u_1) = 1, B(u_i, u_{l+i}) = B(u_{l+i}, u_i) = 1$ であってそれ以外は 0 であるから

$$\rho([u_1, u_j])u_1 = -\rho([u_j, u_1])u_1 = 4u_j \qquad (j \neq 1)$$

$$\rho([u_{i+l}, u_j])u_i = -\rho([u_j, u_{i+l}])u_i = 4u_j \qquad (j \neq i+l,\ i, j \neq 1)$$

$$\rho([u_i, u_j])u_{i+l} = -\rho([u_j, u_i])u_{i+l} = 4u_j \qquad (j \neq i,\ i, j \neq 1)$$

でそれ以外の組み合せは 0 になる．したがって

$$X_i u_{i+2} = u_{i+1}, \qquad X_i u_{l+i+1} = -u_{l+i+2} \qquad (i<l)$$

でそれ以外の u_k に対しては $X_i u_k = 0$ となる．一方次の式が成立する：

$$\frac{1}{4}\rho([u_{l+i+2}, u_{i+1}])u_{i+2} = u_{i+1}, \qquad \frac{1}{4}\rho([u_{l+i+2}, u_{i+1}])u_{l+i+1} = -u_{l+i+2}$$

それ以外に u_k には $\frac{1}{4}\rho([u_{l+i+2}, u_{i+1}])u_k = 0$ となる，したがって X_i に対応するものは

$$\frac{1}{4}[u_{l+i+2}, u_{i+1}] = -\frac{1}{2}w_{i+1}v_i$$

であることがわかる．同様にして次の対応がわかる．

$$X_l \longrightarrow -\frac{1}{4}[u_1, u_{l+1}] = -\frac{1}{2}v_l$$

$$H_i \longrightarrow \frac{1}{4}[u_{l+i+1}, u_{i+1}] - \frac{1}{4}[u_{l+i+2}, u_{i+2}]$$

$$= \frac{1}{2}(w_{i+1}v_{i+1} - w_iv_i) \qquad (i < l)$$

$$H_l \longrightarrow \frac{1}{2}[u_{2l+1}, u_{l+1}] = 1 - w_lv_l$$

いま $z = v_1 \cdots v_l \in U$ とすれば $i < l$ として

$$\left(-\frac{1}{2}w_{i+1}v_i\right)z = \left(-\frac{1}{2}v_l\right)z = \frac{1}{2}(w_{i+1}v_{i+1} - w_iv_i)z = 0$$

$$(1 - w_lv_l)z = 0$$

したがって z は原始ベクトルであって，そのウェイトが λ_l であることがわかる．

したがって U が z を含む ρ-不変な最小複素線形空間であることがわかれば §15 の補題1によってスピン表現 (ρ, U) が λ_l を最高のウェイトとする基本的な既約表現になっていることがわかる．したがって z を含む ρ-不変な複素線形空間が U 自身であることを証明する．このためまず $y_1, \cdots, y_l$ に対応する $\tilde{V}_2$ の元を前と同じように求めれば，

$$y_i \longrightarrow \frac{1}{4}[u_{l+i+1}, u_{i+2}] = \frac{-1}{2}w_iv_{i+1} = \frac{1}{2}v_{i+1}w_i \qquad (i < l)$$

$$y_l \longrightarrow \frac{1}{2}[u_1, u_{2l+1}] = w_l$$

このことから明らかに，w_l を左から掛ける操作と w_iv_{i+1} を左から掛ける操作が入っていることである．ところで

$$w_{l-1}v_lw_l = -2w_{l-1} - w_{l-1}w_lv_l$$

$$= -2w_{l-1} + w_lw_{l-1}v_l$$

ところで $w_lw_{l-1}v_l$ は $w_l(w_{l-1}v_l)$ と考えればよいからこれを左から掛ける操作は入っている．全体として w_{l-1} を左から掛ける操作は入っている．同様のことを w_iv_{i+1} に順々に行えば $w_1, \cdots, w_l$ を左から掛ける操作が全部入っていることがわかる．したがって z から U が生成されることがわかった．

以上により λ_l を最高のウェイトとする $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ の既約表現がスピン表現であることがわかり，前節の結果と合わせて $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のすべての基本的既約表現が得られた．

Clifford 代数の理論

Clifford 代数 $\mathcal{C}$ の主対合と呼ばれる自己同型

$$\alpha: \quad \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を定義する．V の元 u に対して

$$\alpha(u) = -u$$

をみたす（もちろん線形な）自己同型がただ一通り存在することが補題1からわかる．もっと詳しくいえば

$$\alpha(u)^2 = B(u)$$

となるから $\alpha: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ となる準同型が補題1から得られる．ところで α^2 は恒等写像であるから α が自己同型であることがわかる．この α を $\mathcal{C}$ の主対合という．$\mathcal{C}^{\pm}$ を

$$\mathcal{C}^{\pm} = \{x \in \mathcal{C} \mid \alpha(x) = \pm x\}$$

によって定義する．$\mathcal{C}$ の元を Clifford 数と呼び $\mathcal{C}^{+}$ の元を偶 Clifford 数と呼ぶ．

一般に $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とが C の上の代数であって $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への線形写像 $f: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ が次の条件をみたすとき f を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への反準同型という：

$$f(ab) = f(b)f(a)$$

反準同型 $f: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の上への1対1の写像であるとき反同型という．$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ のとき反同型を反自己同型という．

いま $\mathcal{A}$ を $\mathcal{C}$ の反代数とする．すなわち $\mathcal{A}$ は線形空間としては $\mathcal{C}$ と全く同じであるが $\mathcal{A}$ の乗法は $\mathcal{C}$ の乗法を逆向きにしたものになっているとする．このとき V から $\mathcal{A}$ への写像 φ を

$$\varphi(u)^2 = B(u, u) \qquad (v \in V)$$

によって定義すれば補題1によって φ は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{A}$ の上への同型写像にただ一通りに拡大することができる．この写像を

$$x \longrightarrow x'$$

によって表すことにすればこの写像は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への反自己同型になっている．この反自己同型を $\mathcal{C}$ の標準的反自己同型と呼ぶ．明らかに次の性質が成立する：

$$u \in V \quad \text{ならば} \quad u' = u$$

$$x \in \mathcal{C} \quad \text{ならば} \quad (x')' = x$$

明らかに α と $'$ とは交換可能である．すなわち次の式が成立する：

$$\alpha(x') = (\alpha(x))'$$

代数 $\mathcal{A}$ が $\boldsymbol{Z}_2$ 次数つき代数であるということを，$\mathcal{A}$ が線形空間として

$$\mathcal{A} = A^0 \oplus A^1$$

と直和に分解されていて乗法に関して次の条件をみたすことをいう：

$$A^0 \cdot A^0 \subseteq A^0, \qquad A^1 \cdot A^1 \subseteq A^0$$

$$A^0 \cdot A^1 \subseteq A^1, \qquad A^1 \cdot A^0 \subseteq A^1$$

すなわち A^0 は乗法に関して閉じており，A^1 の 2 元の積は A^0 の元となり，A^0 と A^1 の元の積は A^1 の元となる．明らかに $\mathcal{C}$ は

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^-$$

という分解によって $\boldsymbol{Z}_2$ 次数つき代数になっている．

逆に $\mathcal{A} = A^0 \oplus A^1$ が $\boldsymbol{Z}_2$ 次数つき代数のとき，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への自己同型 α を

$$\alpha(a) = a_0 - a_1, \qquad a = a_0 + a_1, \qquad a_0 \in A^0, a_1 \in A^1$$

によって定義することができる．以下に $\boldsymbol{Z}_2$ 次数つき代数には α をこのように定義するものとする．($\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とが共に $\boldsymbol{Z}_2$ 次数つき代数のとき，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とに同じ記号 α を用いることにする．)

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とが $\boldsymbol{C}$ の上の $\boldsymbol{Z}_2$ 次数つき代数とする．このとき $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ との**次数つきテンソル積** $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ を次のように定義する：

(i) $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ は線形空間としてはテンソル積 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ と同じものである．

(ii) $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ の乗法を次の規則によって定義する：

$$(a \otimes (b_0 + b_1)) \cdot ((c_0 + c_1) \otimes d)$$
$$= a(c_0 + c_1) \otimes b_0 d + (ac_0 - ac_1) \otimes b_1 d$$

この乗法はもちろん線形であって結合則をみたす．さらに

$$(1 \otimes 1) \cdot (a \otimes b) = (a \otimes b) \cdot (1 \otimes 1) = a \otimes b$$

となるから $1 \otimes 1$ が乗法の単位元になっている．

さらに $\alpha : \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ を

$$\alpha(a \otimes b) = \alpha(a) \otimes \alpha(b)$$

で定義すれば α は $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ の自己同型写像で $\alpha^2 = 1$ となる，すなわち α は $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ の対合になっている．すなわち $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ も $\boldsymbol{Z}_2$ 次数つき代数になっている．

この次数つき代数 $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ の偶な元（すなわち $\alpha(x)=x$ となる元）は次の形になっている：

$$\sum A^i \otimes B^j \qquad (\text{ここで } i+j \text{ は偶数})$$

さて C を V と B から作られた Clifford 代数とする．いま

$$(V,B)=(V_1,B_1)\oplus(V_2,B_2)$$

ということを次の条件がみたされていることと定義する．

（i） V は線形空間として V_1 と V_2 との直和になっている．すなわち

$$V=V_1\oplus V_2$$

（ii） $u_1\in V_1$，$u_2\in V_2$ とするとき，次の条件がみたされている：

$$B(u_1+u_2)=B(u_1)+B(u_2)$$

ここに $B(x)$ は $B(x,x)$ の略記号とする．以下にこの略記号を用いることにする．

（iii） $B_1=B|V_1$，$B_2=B|V_2$，すなわち B を V_i に制限したものが B_i になっている．

このことから V_1 と V_2 とは B に関して直交していることがわかる．すなわち $u_1\in V_1$，$u_2\in V_2$ とすれば

$$B(u_1,u_2)=0$$

が成立している．

いま V_i の上の対称双線形一次形式 B_i が与えられているとき $V=V_1\oplus V_2$ とおいて B を

$$B(u_1+u_2,u_1'+u_2')=B_1(u_1,u_1')+B_2(u_2,u_2')$$

$u_1,u_1'\in V_1$，$u_2,u_2'\in V_2$ とおけば $(V,B)=(V_1,B_1)\oplus(V_2,B_2)$ が成立する．

この準備の上で次の定理が成立する．

定理 2. $(V,B)=(V_1,B_1)\oplus(V_2,B_2)$ で C, C_i $(i=1,2)$ をそれぞれ (V,B)，(V_i,B_i) の Clifford 代数とすれば次の関係が成立する：

$$C=C_1\hat{\otimes}C_2$$

［証明］ $\phi: V\longrightarrow\mathcal{A}=C_1\hat{\otimes}C_2$ を次の式で定義する：

$$\phi(u_1+u_2)=u_1\otimes 1+1\otimes u_2 \qquad (u_i\in V_i)$$

このとき u_i は C_i で奇の元（すなわち偶の元でない）であるから次の計算が成立する：

$$\phi(u_1+u_2)^2=u_1^2\otimes 1+1\otimes u_2^2$$

$$+ (u_1 \otimes 1)(1 \otimes u_2) + (1 \otimes u_2)(u_1 \otimes 1)$$
$$= u_1{}^2 \otimes 1 + 1 \otimes u_2{}^2 + u_1 \otimes u_2 - u_1 \otimes u_2$$

したがって $1 \otimes 1$ が $\mathcal{A}$ の1であるから

$$\psi(u_1 + u_2)^2 = (B_1(u_1) + B_2(u_2))1 \otimes 1$$
$$= B(u_1 + u_2)$$

これから補題1によって ψ は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{A}$ への準同型に拡大される．これを再び ψ とすれば，ψ は $V_1 \otimes 1$ と $1 \otimes V_2$ とをその像にもっていて，この2つが $\mathcal{A}$ を生成するから，ψ は $\mathcal{A}$ の上への準同型になっている．ところで $\mathcal{C}$ の次元と $\mathcal{A}$ の次元とは同じであるから ψ が同型であることがわかり，ψ は V の上では次数を変えないから ψ は次数つき代数としても同型であることがわかる．

この ψ によって $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}_1 \hat{\otimes} \mathcal{C}_2$ とを同一視すれば標準的反自己同型 $'$ について次の式が成立する：

$$(x \otimes y)' = x' \otimes y'$$

右辺の演算が $\mathcal{C}_1 \hat{\otimes} \mathcal{C}_2$ の上の反自己同型であることおよび $V_1 \otimes 1 + 1 \otimes V_2$ の上で恒等写像であることが明らかであるから上の式が成立することがわかる．▩

例 1.　$\dim V = 1$ のとき．

このとき V の基底を u_1 として

$$B(au_1) = ca^2 \qquad (c \in \boldsymbol{C})$$

とすれば

$$\mathcal{C} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}u_1$$

の形であって，$\boldsymbol{C}$ の生成元は1であるから

$$u_1{}^2 = c$$

によって $\mathcal{C}$ が定められる．したがって $\mathcal{C}$ は

$$\mathcal{C} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}$$

となっている．

ここに蛇足を加えれば，以上の Clifford 代数においてはすべてを $\boldsymbol{C}$ の上の線形空間として扱ってきたが，以上のすべての理論を $\boldsymbol{R}$ の上の線形空間として扱っても全く同様に行われる．いまこのように $\boldsymbol{R}$ の上の Clifford 代数を作ったとする（すなわち V は実線形空間と考える）．このときは $\dim V = 1$ を実次元1とすれば $\sqrt{a} \in \boldsymbol{R}$ のときは $\mathcal{C} = \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$ となり $\sqrt{a} \notin \boldsymbol{R}$（すなわち a が負のとき）は $\mathcal{C} = \boldsymbol{R}(\sqrt{a})$ となっている．▩

例 2. $\dim V=2$ のとき.

V の生成元を u_1, u_2 として

$$B(a_1u_1+a_2u_2)=ca_1^2+da_2^2$$

とすれば C は $1, u_1, u_2$ から生成されて

$$u_1^2=c, \qquad u_2^2=d, \qquad u_1u_2+u_2u_1=0$$

となり C は $1, u_1, u_2, u_3$ から張られる．ここに $u_3=u_1u_2$ であり

$$u_1^2=c, \qquad u_2^2=d, \qquad u_3^2=-cd$$

となる．したがって C は4元数の代数になっている．■

例 3. $\dim V=m$ で V の基底は $u_1, \cdots, u_m$ で $B(a_1u_1+\cdots+a_mu_m)=-(a_1^2+\cdots+a_m^2)$ のとき.

このときは C は $1, u_1, \cdots, u_m$ で生成され

$$u_i^2=-1, \qquad u_iu_j+u_ju_i=0 \qquad (i\neq j)$$

をみたす．$N=\{1,2,\cdots,m\}$，$A=\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_r)$ として

$$e_A=u_{i_1}\cdots u_{i_r}$$

とすれば一般論で調べたように C は e_A で生成される．ここに A は N のすべての部分集合を走るものとする．もちろん $\dim C=2^m$ となる．■

Clifford 群およびねじれ Clifford 群を定義するために，まず $C^\times$ を C の（乗法の意味での）逆元が存在するものの全体とする．すなわち C の元 x が $C^\times$ に属するということは $y\in C$ で $xy=1$ となる y が存在することである．このとき G と Γ を次の式で定義する：

$$G=\{x\in C^\times \mid \text{すべての } u\in V \text{ について } xux^{-1}\in V\}$$

$$\Gamma=\{x\in C^\times \mid \text{すべての } u\in V \text{ について } \alpha(x)ux^{-1}\in V\}$$

このとき G を Clifford 群，Γ をねじれ Clifford 群という．

いま $G^+=G\cap C^+$，$\Gamma^+=\Gamma\cap C^+$ とおけば

$$G^+=\Gamma^+$$

が成立する．

G も Γ も明らかに α と $'$ について閉じている．いま $x\in G$ について $\rho(x)$ を $x\in\Gamma$ について $\tilde\rho(x)$ を次の式で定義する：

$$\rho(x)u=xux^{-1}, \qquad \tilde\rho(x)u=\alpha(x)ux^{-1}$$

明らかに ρ および $\tilde{\rho}$ は V を表現空間とする G および Γ の表現になっている．この表現をそれぞれ G の随伴表現および Γ のねじれ随伴表現と呼ぶ．

補題 5. $\ker\tilde{\rho} = \boldsymbol{C}^{\times}$ ここに $\boldsymbol{C}^{\times} = \boldsymbol{C} - \{0\}$ である．

［証明］ いま $u_1, \cdots, u_m$ を B に関して互いに直交した基底とする．いま

$$B(\sum a_i u_i) = \sum \varepsilon_i u_i^2$$

とする．(ε_i をつけてあるのは実は $\boldsymbol{C}$ の場合だけでなくて $\boldsymbol{R}$ の場合，すなわち V が実線形空間の場合の Clifford 代数のためも考えているからである．以下なるべく $\boldsymbol{R}$ の場合にも通用するように話を進める．)

いま $N = \{1, \cdots, m\}$，$A = \{i_1, \cdots, i_r\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$ として

$$e_A = u_{i_1} \cdots u_{i_r}$$

とする．このとき 1 と e_A の全体が C の基底となっている．以下 $A = \phi$ のとき $e_A = 1$ と定義する．

さて $x \in \ker\tilde{\rho}$ とする．このとき

$$x = \sum t_A e_A \qquad (t_A \in \boldsymbol{C})$$

とする．このとき

$$\alpha(x) u_i - u_i x = \sum t_A((-1)^{|A|} e_A u_i - u_i e_A)$$

となる．ここに $|A|$ は A の元の個数を表す．

さて $u_j u_i + u_i u_j = 0$ $(i \neq j)$ であるから，$i \notin A$ なる i については次の式が成立する：

$$(-1)^{|A|} e_A u_i = u_i e_A$$

次に $i \in A$ として $A = B \cup \{i\}$ で $i \notin B$ とすれば

$$|\{j \in A | j > i\}| = r, \qquad |\{j \in A | j < i\}| = r'$$

とすれば $|A| = r + r' + 1$ となる．このとき

$$\begin{aligned}(-1)^{|A|} e_A u_i - u_i e_A &= (-1)^{|A|}(-1)^r u_i^2 e_B - (-1)^{r'} u_i^2 e_B \\ &= 2(-1)^{r'+1} u_i^2 e_B\end{aligned}$$

したがって $x \in \ker\tilde{\rho}$ から

$$\sum_{i \notin B} t_{B \cup \{i\}}\, u_i^2 e_B (-1)^{r'+1} = 0$$

がでてくる．e_B は一次独立であるから，すべての $i \in A$ について $t_A = 0$ であることがわかる．ところで i は任意であるから $A \neq \phi$ なるすべての A について $t_A = 0$ がわかる．すなわち $x \in \boldsymbol{C} - \{0\}$ が証明された．■

いま代数 $\mathcal{A}$ のセンター（中心）を A の任意の元と交換可能な元の全体と定義して center $\mathcal{A}$ とかくことにする．

定理 3. 次の式が成立する：

$$\text{center } \mathcal{C} = \begin{cases} C & (m \text{ が偶数のとき}) \\ C + Ce_N & (m \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

特に次の式が成立する：

$$\ker \rho = (\text{center } \mathcal{C})^\times$$

ここに $^\times$ は逆元が存在する元の全体を意味する．

［証 明］ さて B が非退化であるから，$u_1, \cdots, u_m$ をその直交基底とすれば，

$$u_i u_j + u_j u_i = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$u_i^2 = B(u_i) = \varepsilon_i \neq 0$$

となる．したがって

$$u_j u_i u_j^{-1} = \begin{cases} +u_i & (j = i \text{ のとき}) \\ -u_i & (j \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

ゆえに次の式が得られる：

$$u_j e_A u_j^{-1} = \begin{cases} (-1)^{|A|} e_A & (j \notin A \text{ のとき}) \\ (-1)^{|A|-1} e_A & (j \in A \text{ のとき}) \end{cases}$$

したがって $\varepsilon_j(A) e_A = u_j e_A u_j^{-1}$，$x = \sum t_A e_A$ とすれば

$$u_j x u_j^{-1} = \sum t_A \varepsilon_j(A) e_A$$

いま center $\mathcal{C}$ を Z とおけば

$$x \in Z \implies \varepsilon_j(A) = +1$$

がでてくる．したがって $|A|$ が偶数ならば，すべての j について $j \notin A$ したがって $A = \phi$ がわかる．

もし $|A|$ が奇数とすれば $A = N = \{1, \cdots, m\}$ であるか $A = \phi$ であることがわかる．■

定理 4. m が偶数ならば $\mathcal{C}$ は単純である．

［証 明］ I を $\mathcal{C}$ の両側イデアルとする．いま I の元 x が

$$x = \sum t_A e_A \qquad (t_{A_0} \neq 0)$$

とする．いま $A_0 \neq \phi$ とする．このとき e_{A_0} を掛ければ

$$x e_{A_0} = t' e_\phi + \cdots \qquad (t' \neq 0)$$

となる．したがって初めから $x = \sum t_A e_A$ で $t_\phi \neq 0$ としてよい．

さてこのような x のなかで $t_A \neq 0$ となる A の数が最小のものを1つとって x とする．このとき

$$x + u_j x u_j^{-1} = \sum t_A(1+\varepsilon_j(A))e_A$$

もし $\varepsilon_j(A)$ の値が j が変化するときに x にでてくる A について $+1$ と -1 との双方をとるとすれば $x+u_jxu_j^{-1} \in I$ にでてくる e_A の数を減らすことができるから，x にでてくるすべての e_A について $\varepsilon_j(A)$ はすべてが $+1$ であるか，すべてが -1 であるかいずれかである．ところで $t_\phi \neq 0$ したがって $\varepsilon_j(A) = +1$ がすべての x にでてくる ε_j に対して成立している．このことから

$$u_j x u_j^{-1} = x$$

がすべての j に対して成立していることがわかる．すなわち前定理により $x \in C - \{0\}$ であることがわかる．したがって $I = C$ が成立する．■

定理 5. m が奇数ならば C^+ は単純である．

［証明］ 定理3の証明と同じように I が C^+ の両側イデアルとして $x \in I$ を

$$x = \sum t_A e_A \qquad (t_\phi \neq 0)$$

の数のもので表される e_A の数が一番小さいものとする．このとき $x' \in I$ を次の形で定義する：

$$x' = x + u_i u_j x (u_i u_j)^{-1}$$

x' は次の形になる：

$$x' = \sum t_A(1+\varepsilon_i(A)\varepsilon_j(A))e_A$$

もし $\varepsilon_i(A)\varepsilon_j(A)$ が x にでてくるすべての e_A についてすべて $+1$ であるかすべて -1 でなければならないことが前と同様にわかる．したがって前と同様に $+1$ でなければならないことがわかる．ところで

$$\varepsilon_i(A)\varepsilon_j(A) = \begin{cases} -1 & (i,\ j \notin A) \\ +1 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

となる．ところで m は奇数で $x \in C^+$ であるから，すべての x にでてくる A について少なくとも1つ $j \notin A$ となる j が存在する．したがって $A \neq \phi$ とすれば $i \in A$ で $j \notin A$ となる i と j とが存在する．これは矛盾であるから $A = \phi$ しかなく，I には C の0でない元が存在して $I = C^+$ がわかる．■

次に C の元 x について，そのスピンノルム $N(x)$ を次の式で定義する：

$$N(x) = x\bar{x} = x\alpha(x)'$$

特別な場合として $x = u \in V$ をとれば

$$N(u) = u(-u)' = -u^2 = -B(u)$$

となる．もし $x \in C^\times$ すなわち x に逆元が存在すれば，$N(x) \in C^\times$ となる．

補題 6. $x \in \Gamma$ とすれば $N(x) \in \boldsymbol{C} - \{0\}$ となり，$x \longrightarrow N(x)$ という対応は Γ から $\boldsymbol{C}^\times = \boldsymbol{C} - \{0\}$ への準同型になっている．さらにすべての $x \in \Gamma$ について次の式が成立する：

$$N(\alpha(x)) = N(x)$$

［証 明］ いま $x \in \Gamma$ とすれば，$u \in V$ について

$$\alpha(x)ux^{-1} = u_1 \in V$$

となるから次の式が成立する：

$$x'^{-1}u'\alpha(x)' = u_1' = u_1 = \alpha(x)ux^{-1}$$

したがって次の式が成立する：

$$x'\alpha(x)ux^{-1}\alpha(x')^{-1} = u$$

これは $\alpha(x')x \in \Gamma$ であってしかも $\alpha(x')x \in \ker\tilde{\rho}$ であることを示している．したがって補題5より

$$\alpha(x')x = \bar{x}x = N(\bar{x}) \in \boldsymbol{C}^\times$$

となる．ところで $x \longrightarrow \bar{x}$ は Γ の反自己同型であるから，$N(x) \in \boldsymbol{C}^\times$ がでてくる．

次に $x, y \in \Gamma$ とすれば

$$N(xy) = xy\bar{y}\bar{x} = xN(y)\bar{x} = x\bar{x}N(y) = N(x)N(y)$$

となる．したがって N は準同型になっている．さらに $N(x) \in \boldsymbol{C}^\times$ から次の式がでて証明が終る：

$$N(\alpha(x)) = \alpha(x)x' = \alpha(x\bar{x}) = \alpha(N(x)) = N(x) \qquad \blacksquare$$

補題 7. いま $x \in \Gamma$ で $u \in V$ として $u_1 = \alpha(x)ux^{-1}$ とすれば次の式が成立する：

$$N(u) = N(u_1)$$

別のいい方をすれば，すべての $u \in V$ について

$$N(\tilde{\rho}(x)u) = N(u)$$

が成立する．さらに次の式がすべての $u, v \in V$ について成立する：

$$x \in \Gamma \implies B(\tilde{\rho}(x)u, \tilde{\rho}(x)v) = B(u, v)$$

［証 明］ 次の計算が成立する：

$$
\begin{aligned}
N(\alpha(x)ux^{-1}) &= \alpha(x)ux^{-1}\bar{x}^{-1}\bar{u}\,\overline{\alpha(x)} \\
&= \alpha(x)u(\bar{x}x)^{-1}\bar{u}x' = \alpha(x)u\bar{u}x'(\bar{x}x)^{-1} \qquad ((\bar{x}x)^{-1} \in C^{\times}) \\
&= N(u)N(\bar{x})^{-1}\alpha(x)x' = N(u)N(\bar{x})^{-1}N(\alpha(x)) = N(u)N(\bar{x})^{-1}N(x)
\end{aligned}
$$

一方次の計算が成立する：

$$N(\bar{x}) = \bar{x}x = (\alpha(x)\overline{\alpha(x)})' = (N(\alpha(x)))' = N(\alpha(x)) = N(x)$$

したがって次の式が成立する：

$$N(\tilde{\rho}(x)u) = N(u)$$

$N(u) = -B(u)$ から直ちに $\tilde{\rho}(x)$ が B を不変にすることがわかる． ■

いま $O(V, B)$ を B を不変にする $GL(V, C)$ の元の全体と定義する．すなわち

$$O(V, B) = \{A \in GL(V, C) \mid \text{すべての } u \in V \text{ について } B(Au) = B(u)\}$$

このとき上の補題によって次の式が成立する：

$$\tilde{\rho}(\Gamma) \subseteq O(V, B)$$

定理 6. B が非退化ならば次の式が成立する：

$$\tilde{\rho}(\Gamma) = O(V, B)$$

［証明］ いま $u_0 \in V$ を $B(u_0) \neq 0$ なる元とする．このとき $\xi_{u_0} : V \longrightarrow V$ を次の式によって定義する：

$$\xi_{u_0}(v) = v - \frac{2B(v, u_0)}{B(u_0)}u_0$$

これは明らかに超平面 $\{v \mid B(v, u_0) = 0\}$ によるリフレクションである．しかも ξ_{u_0} は B を不変にする．すなわち

$$B(\xi_{u_0}(v)) = B(v)$$

しかし $\det \xi_{u_0} = -1$ であり $\xi_{u_0} \in O(V, B)$ となる．

我々の定理の証明は次の補題を用いて行われる．この補題の証明は演習問題として省略する．証明はたとえばあとがきのなかの Cartan の本にある．

補題 8. $O(V, B)$ は $B(u_0) \neq 0$ となる元 u_0 による ξ_{u_0} の形の元によって生成される．もし $\dim V = m$ とすれば，すべての $O(V, B)$ の元は ξ_{u_0} の形の高々 m 個の元の積として表される． ▯

さて定理の証明をするためには $B(u_0) \neq 0$ として，$\xi_{u_0} \in \tilde{\rho}(\Gamma)$ をいえばよい．

さて B を対角化する基底 $u_1, \cdots, u_m$ を次のように選ぶことにする：

1)　　$$B(\sum t_j u_j) = \sum \varepsilon_j t_j^2$$

2)　$$u_1 = u_0$$

このとき次の式が成立する：

$$\alpha(u_1)u_j u_1^{-1} = -u_1 u_j u_1^{-1} = \begin{cases} -u_1 & (j=1) \\ u_j & (j \neq 1) \end{cases}$$

したがって $u_1 \in \Gamma$ であり $\tilde{\rho}(u_1) = \xi_{u_0}$ となる. ■

系 **1**.　すべての元 $x \in \Gamma$ は次の形にかける：

$$x = cu_1u_2\cdots u_r$$

ここに $c \in C^\times$, $u_i \in V$ で $B(u_i) \neq 0$ とする. x が偶か奇かは r が偶数か奇数かによって定まる.

系 **2**.　$x \in \Gamma$ とすれば $\det \tilde{\rho}(x) = (-1)^r$ となる. したがって $\tilde{\rho}(x) \in SO(V, B)$ となる必要十分条件は x が偶であることである.

系 **3**.　N をスピンノルムとする，すなわち $N(x) = x\bar{x}$ とする. このとき次の式が成立する：

$$N(cu_1\cdots u_r) = (-1)^r c^2 B(u_1)\cdots B(u_r)$$

［証 明］

$$N(cu_1\cdots u_r) = N(c)N(u_1)\cdots N(u_r)$$
$$= c^2(-1)^r B(u_1)\cdots B(u_r)$$ ■

$x \in \Gamma$ とすれば x は偶か奇である. それにしたがって $\alpha(x)ux^{-1} = \pm xux^{-1}$ となる. したがって $xux^{-1} \in V$ となる. すなわち $x \in G$ となる. すなわち Γ は G の部分群になっている. さて $\dim V$ が偶数とする. このとき，任意の $x \in G$ について

$$\rho(x)u = xux^{-1} \in V$$

である. ところで

$$B(xux^{-1}) = xux^{-1}xux^{-1} = xu^2x^{-1} = B(u)xx^{-1} = B(u)$$

であるから $\rho(x) \in O(V, B)$ したがって $y \in \Gamma$ なる元 y で $\rho(x) = \tilde{\rho}(y)$ をみたすものが存在する. もし y が偶ならば $\tilde{\rho}(y) = \rho(y)$ となる. また y が奇ならば $\rho(x) = \tilde{\rho}(y) = -\rho(y)$ となる.

さて $e_N = u_1u_2\cdots u_m$ は偶で

$$\tilde{\rho}(e_N) = -1$$

であるから $\rho(e_N) = -1$ となる. したがって $\rho(x) = \rho(y)$ か $\rho(x) = \rho(e_N y)$ かいずれかで成立する. $e_N y \in \Gamma$ である. したがって xy^{-1} または $x(e_N y)^{-1}$ が center $C = C^\times$ に属する. したがって $C^\times \subseteq \Gamma$ から $x \in \Gamma$ であることがわかる. すなわち $G = \Gamma$ と

なる．

補題9． m が奇数のときは次のことが成立する．

(i)　　$G = \Gamma^+ \cdot Z^\times$　　(ここに $Z = \text{center}\, C$)

(ii)　　$\rho(G) = SO(V, B)$

［証明］ いま $u_1, \cdots, u_m$ を直交基底とすれば $e_N = u_1 \cdots u_m$ は Z の元になっている．

次に $-1 \notin \rho(G)$ を証明する．このためそうでないとして $x \in G$ で次の式をみたすものが存在したとする：

$$u \in V \implies xux^{-1} = -u$$

このときには次の式が成立する：

$$u \in V \implies xux^{-1} = \alpha(u)$$

ところで α は自己同型であるから，すべての $y \in C$ について

$$\alpha(y) = xyx^{-1}$$

が成立する．ところで e_N は奇であるから $\alpha(e_N) = -e_N$．一方 e_N は Z の元であるから $xe_Nx^{-1} = e_N$ で矛盾が生じた．

さて $\tilde{\rho}(\Gamma) = O(V, B)$ であるから $x \in G$ とすれば，前頁の計算から $\rho(x) \in O(V, B)$ したがって $y \in \Gamma$ で次をみたすものがある：

$$\rho(x) = \tilde{\rho}(y)$$

y が偶ならば $\tilde{\rho}(y) = \rho(y) = \rho(x)$ となるから

$$xy^{-1} \in Z^\times \qquad \text{すなわち} \qquad x \in \Gamma^+ \cdot Z^\times$$

となって (i) がいえた．次に y を奇とすれば，

$$\tilde{\rho}(y) = -\rho(y) \qquad \text{ゆえに} \qquad \rho(xy^{-1}) = -1$$

ところで $\Gamma \subseteq G$ であるから $-1 \notin \rho(G)$ からこれは不可能である．したがって (i) がいえた．(ii) は (i) と定理6とその系1から直ちにでるから明らかである．■

ここに V が実線形空間で，すべていままで C でやったことを $\boldsymbol{R}$ で行う場合について注意をする．普通数学で用いられる用語も用いることにする．$\boldsymbol{R}$ の場合に興味のない読者は飛ばされることを推めたい．

まずリフレクション ξ_{u_0} は u_0 を cu_0 $(c \in \boldsymbol{R})$ と変えても変化しない．したがって u_0 を $B(x_0) = \pm 1$ と選ぶことができる．以前の議論で変更するところをのべる．

Γ の任意の元 x は次の形にかくことができる：

$$x = cu_1u_2\cdots u_r \qquad (\text{ここで } c \in \boldsymbol{R},\ B(u_i) = \pm 1)$$

さらに $r \leq m$ とする．x は r が偶数ならば偶，奇数ならば奇である．したがって x は偶か奇かのいずれかになる．

$x = cu_1\cdots u_r$ を上のようにとれば次の式が成立する：

$$N(x) = \pm c^2 \quad \text{で} \qquad \det \tilde{\rho}(x) = (-1)^r$$

次のように Pin と $Spin$ を定義する：

$$Pin = \{x \in \Gamma \,|\, |N(x)| = 1\}$$

$$Spin = \{x \in \Gamma \,|\, |N(x)| = 1,\ \det \tilde{\rho}(x) = 1\}$$

このとき Γ と $Pin, Spin$ の関係は次の式で表される：

$$\Gamma \simeq Pin \times \boldsymbol{R}_+^\times, \qquad Spin = Pin \cap \Gamma^+$$

さらに次の関係式が成立する：

$$\tilde{\rho}(Pin) = O(V, B); \qquad \tilde{\rho}(Spin) = SO(V, B)$$

$$Pin = \{\pm u_1u_2\cdots u_r \,|\, u_i \in V,\ B(u_i) = \pm 1\}$$

したがって次の式が成立する：

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{Z}_2 \longrightarrow Pin \longrightarrow O(V, B) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{Z}_2 \longrightarrow Pin \longrightarrow Spin$$

$Spin$ の群は Pin のなかの偶の元の全体であるから Pin のなかの指数 2 の部分群になっている．

もし B が（正または負の）定符号であれば $SO(V, B)$ は弧状連結になっている．以下に $m \geq 3$ のとき -1 が $Spin$ の単位元の連結成分のなかに入っていることを証明する．$Spin$ は $SO(V, B)$ の二重の被覆群であるからこのことは $Spin$ が $SO(V, B)$ の単連結被覆群になっていることを示す．

Γ は 2 つの連結成分から成っており，その連結部分群は $Spin \times \boldsymbol{R}_+^\times$ の形になっている．ここに B が定符号であることを仮定している．

以下には B は非退化であるとするが，定符号であることは仮定しない．

$v_1, v_2 \in V$ が $B(v_i) = \varepsilon_i$ $(i = 1, 2)$ $\varepsilon_i = \pm 1$ で $B(v_1, v_2) = 0$ とする 2 つの場合に分けて考える．

1) $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ のとき．

$$x_t = \cos t + \sin t\ v_1v_2 \in C$$

とおけば x_t は次の性質をみたすことは計算から明らか：

$$x_{t+s} = x_t x_s$$
$$x_t v_1 x_t^{-1} = \cos 2t\, v_1 - \varepsilon_1 \sin 2t\ v_2$$
$$x_t v_2 x_t^{-1} = \varepsilon_2 \sin 2t\ v_1 + \cos 2t\ v_2$$
$$x_t v x_t^{-1} = v \qquad (ここで\ B(v, v_1) = B(v, v_2) = 0\ とする)$$

x_t は明らかに偶であるから上のことから $x_t \in \Gamma$ がわかる．さらに $N(x_t) = 1$ となるから $x_t \in Spin$ となる．

いま y_t を次の式で定義する：

$$y_t = \cos\frac{t}{2} v_1 + \sin\frac{t}{2} v_2$$

このとき次の式が成立する：

$$y_t y_{-t} = \varepsilon_1(\cos t - \varepsilon_2 \sin t\, v_1 v_2) = \varepsilon_1 x_{-\varepsilon_2 t}$$

x_t において $t = \pi$ とおけば -1 が $Spin$ の単位元の連結成分に入っていることがわかる．

2) $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ のとき．

x_t を次の式で定義する：

$$x_t = \cosh t + \sinh t\ v_1 v_2$$

このとき次の式は計算から明らかである：

$$x_{t+s} = x_t x_s$$
$$x_t v_1 x_t^{-1} = \cosh 2t\ v_1 - \varepsilon_1 \sinh 2t\ v_2$$
$$x_t v_2 x_t^{-1} = \varepsilon_2 \sinh 2t\ v_1 + \cosh 2t\ v_2$$
$$x_t v x_t^{-1} = v \qquad (ここで\ B(v, v_1) = B(v, v_2) = 0\ とする)$$

明らかに x_t は偶であるから $x_t \in \Gamma$ で $N(x_t) = 1$ となる．したがって $x_t \in Spin$ がでてくる．

さて最初に約束した $m \geq 3$ のとき -1 が単位元の連結成分に入ることをいう．$m \geq 3$ のときは $v_1, v_2 \in V$ で次の条件をみたすものが存在する：

$$v_1^2 = \varepsilon_1, \qquad v_2^2 = \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \pm 1$$

したがって $x_t = \cos t + \sin t\ v_1 v_2$ において $t = \pi$ とおけば -1 が単位元の連結成分に入ることがわかる．

$m = 2$ のときはこれは成立しない．これをみるために $C(B)$ の基底 $1, u_1, u_2, u_1 u_2$ を次のようにとる：

$$u_1{}^2 = 1, \qquad u_2{}^2 = -1,$$
$$u_1u_2 + u_2u_1 = 0$$

このとき

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$u_1u_2 = -u_2u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$C \simeq M(2, \boldsymbol{C})$$

であることがわかる：

$$(u_1u_2)u_i(u_1u_2)^{-1} = -u_i \qquad (i = 1, 2)$$
$$(u_1u_2)^2 = 1$$

であるから次の式を得る：

$$(u_1u_2)^{-1} = u_1u_2, \qquad \alpha(x) = u_1u_2x(u_1u_2)^{-1}$$

次に $C \simeq M(2, \boldsymbol{C})$ であるから $C^{\times} \sim GL(2, \boldsymbol{C})$ であり，Γ は次の形である：

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \in V \right\}$$

すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ は b, c に対して次の条件をみたす b', c' が存在すること である：

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ c' & 0 \end{pmatrix}$$

これからすべての b, c に対して

$$\beta\delta c - \alpha\gamma b = 0$$

したがって

$$\beta\delta = 0 \quad \text{で} \qquad \alpha\gamma = 0$$

これから $\beta = 0$ で $\gamma = 0$ かまたは $\alpha = 0$ で $\delta = 0$ であることがわかる．すなわち Γ は次の形である：

$$\Gamma = \left\{ t\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \text{ または } t\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -1/\beta & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \right\}$$

すなわち u_1, u_2 を用いてかけば Γ は次の形である：

$$\Gamma = \{t_0 + t_3u_1u_2 | t_0{}^2 - t_3{}^2 \neq 0\} \cup \{t_1u_1 + t_2u_2 | t_1{}^2 - t_2{}^2 \neq 0\}$$

これから Γ^+ が次の形になることがわかる：

$$\Gamma^+ = \{t_0 - t_3u_1u_2 | t_0{}^2 - t_1{}^2 \neq 0\}$$

したがって Γ^+ は4つの連結成分をもつ1の連結成分は次の形のものである：

$$t_0 + t_3u_1u_2, \qquad t_0 + t_3 > 0$$
$$t_0 - t_3 > 0$$

したがって -1 は1の連結成分には入っていない．

さて本題に戻って $\boldsymbol{C}$ の上の線形空間の上の Clifford 代数を考えることにする（もちろんほとんどの議論は $\boldsymbol{R}$ でもそのまま通用するのであるが）

$$l: \quad C^\times \longrightarrow GL(C)$$

を次の式によって定義する：

$$l(x)y = xy \qquad (x \in C^\times, y \in C)$$

この l を $C^\times$ の左正規表現という．この l によって $C^\times$ は $GL(C)$ に埋め込まれるから $GL(C)$ の閉部分群と考えてよい．すなわち $C^\times$ は線形リー群になっている．

$t \longrightarrow x(t)$ を $\boldsymbol{R}$ から $C^\times$ への連続準同型とすれば

$$\frac{d}{dt}x(t)y\Big|_{t=0} = x'(0)y$$

となるから次の式が得られる：

$$l(x(t)) = e^{tl(x'(0))}$$

逆に $x \in C$ を任意にとれば

$$e^{tl(x)} = l(e^{tx})$$

となるから $C^\times$ のリー代数は C だと思ってよい．ここに

$$x \longrightarrow \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in C^\times$$

となる C のリー代数の交換子積は

$$[x, y] = xy - yx \qquad (x, y \in C)$$

となっている．

さて $\Gamma \subseteq C^\times$ であって Γ の定義から Γ は閉部分群であることは明らかであるから，Γ も線形リー群である．次にそのリー代数を求める．

定理 7. Γ のリー代数は C の元で偶であってその次数が ≤ 2 なるものの全体である．すなわち次の形のものである：

$$\boldsymbol{C} + \sum_{i<j} \boldsymbol{C} u_i u_j$$

もちろん $u_1, \cdots, u_m$ を V の基底とする．

［証明］ $x \in C$ とする x が Γ のリー代数に属する必要十分条件はすべての $t \in \boldsymbol{R}$ について

$$\exp tx \in \Gamma$$

ということである．いいかえれば

$$(\exp t\alpha(x))u \exp(-tx) \in V$$

がすべての $u \in V$ と $t \in \boldsymbol{R}$ に成立することである．t で微分して $t = 0$ とおけば

$$\alpha(x)u - ux \in V$$

がすべての $u \in V$ に対して成立することがわかる．逆も明らかであるから Γ のリー代数が次のものであることがわかる：

$$\{x \in C \mid \alpha(x)u - ux \in V \text{ がすべての } u \in V \text{ に成立する}\}$$

さて $u_1, \cdots, u_m$ を直交基底として $B(u_i) = \varepsilon_i (= \pm 1)$ をみたしているものとする．このとき

$$x = \sum t_A e_A$$

とかけば

$$\alpha(x)u_i - u_i x = \sum t_A((-1)^{|A|} e_A u_i - u_i e_A)$$

ところで $i \notin A$ とすれば

$$(-1)^{|A|} e_A u_i - u_i e_A = 0$$

となる．$i \in A$ のときは $|A| \geq 1$ として $A = B \cup \{i\}$ で $i \notin B$ として

$$r = |\{j \in A \mid j > i\}|, \qquad r' = |\{j \in A \mid j < i\}|$$

とすれば $|A| = r + r' + 1$ で次の式が成立する：

$$\begin{aligned}(-1)^{|A|} e_A u_i - u_i e_A &= (-1)^{r'+1} \varepsilon_i e_B - (-1)^{r'} \varepsilon_i e_B \\ &= 2(-1)^{r'+1} \varepsilon_i e_B\end{aligned}$$

したがって次の式が成立する：

$$\alpha(x)u_i - u_i x = 2 \sum_{i \notin B} (-1)^{r'+1} \varepsilon_i t_{B \cup \{i\}} e_B$$

この元が V に入っている必要十分条件は $|B| \neq 1$ で $i \notin B$ なるすべての B について

$$t_{B \cup \{i\}} = 0$$

が成立することである．これから $|A| \neq 0, 2$ となる A については $t_A = 0$ であることがわかり

$$\Gamma \text{ のリー代数} = \boldsymbol{C} + \sum_{i<j} \boldsymbol{C} u_i u_j$$

であることがわかった．またはこのリー代数は V の 2 元 u, v の全体について uv から張られる線形空間であるといってもよい．■

さてこの定理に関係して $v_1, v_2 \in V$ で $B(v_i) = \varepsilon_i,\ B(v_1, v_2) = 0$ としたときに

$$\exp t v_1 v_2 = \sum t^n \frac{(v_1 v_2)^n}{n!}$$

を計算してみることにする．

まず次の計算をする：

$$(v_1 v_2)^2 = v_1 v_2 v_1 v_2 = -v_1{}^2 v_2{}^2 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -\varepsilon$$

これから明らかに

$$(v_1 v_2)^{2l} = (-\varepsilon)^l, \qquad (v_1 v_2)^{2l+1} = (-\varepsilon)^l v_1 v_2$$

したがって次の式が成立する：

$$\exp t v_1 v_2 = \sum \frac{(-\varepsilon)^l t^{2l}}{2l!} + \sum \frac{(-\varepsilon)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} v_1 v_2$$

ところで次の式が成立する．中間は $\boldsymbol{C}$ で最後は $\boldsymbol{R}$ で考える：

$$\sum \frac{(-\varepsilon)^l t^l}{2l!} = \cos(\sqrt{\varepsilon}\, t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\varepsilon}\, t) & (\varepsilon > 0 \text{ のとき}) \\ \cosh(\sqrt{-\varepsilon}\, t) & (\varepsilon < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\sum \frac{(-\varepsilon)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} = \frac{\sin \sqrt{\varepsilon}\, t}{\sqrt{\varepsilon}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin \sqrt{\varepsilon}\, t & (\varepsilon > 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} \sinh \sqrt{\varepsilon}\, t & (\varepsilon < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

したがって $\boldsymbol{R}$ のときは次の式が得られる：

$$\exp t v_1 v_2 = \begin{cases} \cos \sqrt{\varepsilon}\, t + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin \sqrt{\varepsilon}\, t\ v_1 v_2 & (\varepsilon > 0 \text{ のとき}) \\ \cosh \sqrt{-\varepsilon}\, t + \dfrac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} \sinh(\sqrt{-\varepsilon}\, t) v_1 v_2 & (\varepsilon < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

次に $B(v_1) = 0,\ B(v_2) = 0,\ B(v_1, v_2) = 1$ のときを考えれば

$$\begin{aligned} (v_1 v_2)^2 &= v_1 v_2 v_1 v_2 = v_1 (2 - v_1 v_2) v_2 \\ &= 2 v_1 v_2 - v_1{}^2 v_2{}^2 = 2 v_1 v_2 \end{aligned}$$

したがって次の式が成立する：

$$(v_1v_2)^l = 2^{l-1}v_1v_2 \qquad (l \geq 1)$$

したがって次の式が得られる：

$$\exp\, tv_1v_2 = \sum \frac{t^l}{l!}(v_1v_2)^l = 1 + \sum_{l\geq 1} \frac{t^l 2^{l-1}}{l!} v_1v_2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)\ v_1v_2$$

さて Γ^+ は Γ の連結成分であって，Γ^+ の上では $\tilde{\rho} = \rho$ となる．したがって次の式が成立する：

$$\tilde{\rho}(\Gamma^+) = \rho(\Gamma^+) = SO(V, B)$$

これを微分すれば次の式を得る：

$$d\rho: \quad \Gamma \text{ のリー代数} \longrightarrow \mathfrak{so}(V, B), \ \ker d\rho = \boldsymbol{C}$$

もちろんここで $\mathfrak{so}(V, B)$ は次のものである．

$$\mathfrak{so}(V, B) = \{A \in \mathrm{End}(V) \,|\, B(Au, v) + B(u, Av) = 0 \text{ がすべての } u, v \in V \text{ に成立}\}$$

いま $u, v \in V$ とする．このとき uv は定理6により Γ のリー代数に入っている．直接の計算により次のことがわかる：

$$d\rho(uv)w = uvw - wuv$$

$$= 2B(w, v)u - 2B(w, u)v$$

もし $u_1, \cdots, u_m$ が B で直交している V の基底とすれば Γ のリー代数の半単純部分代数は次の形のものからできている：

$$\sum_{i<j} \boldsymbol{C}u_iu_j$$

しかも $d\rho$ はこの代数から $\mathfrak{so}(V, B)$ への同型写像になっている．このことを次に行う．

この Γ のリー代数の分解のためにまずスピンノルム N について

$$N(x) = x\alpha(x)' \quad \text{で} \qquad N: \Gamma \longrightarrow \boldsymbol{C}^\times \quad \text{準同型}$$

であることを思いだして，この N の微分を考えれば Γ のリー代数から $\boldsymbol{C}$ へのリー代数の準同型が得られる．これを計算してみせると次のようになる：

$$N(\exp tx) = \exp tx \exp tx' \qquad (x \in (\Gamma \text{ のリー代数}))$$

これから $x \in$ (Γ のリー代数) として次の式が得られる：

$$dN(x) = x + x'$$

特に $dN(1) = 2$ で $dN(uv) = 2B(u, v)$ となる．したがって次の式が得られる：

$$(\Gamma \text{ のリー代数}) = \boldsymbol{C} + \ker\, dN$$

したがって $\ker dN$ はイデアルであり，$m \geq 3$ のときは $\mathfrak{o}(V, B)$ は半単純であるから

$$d\rho: \quad (\Gamma \text{ のリー代数}) \longrightarrow \mathfrak{o}(V, B)$$

は $\mathfrak{o}(V, B)$ の上への準同型であり，$\ker d\rho = \boldsymbol{C}$ となる．したがって

$$d\rho: \quad \ker dN \longrightarrow \mathfrak{o}(V, B)$$

は同型写像になっている．

Clifford 代数のスピン表現

いま $\boldsymbol{C}$ の上の代数 $\mathcal{A}$ を考える．$\mathcal{A}$ が単純で $\mathcal{A}$ のセンター（中心）が $\boldsymbol{C}$ となるとき $\mathcal{A}$ を $\boldsymbol{C}$ の上の中心的単純代数という．このとき Wedderburn（ウェッダーバーン）の定理によって $\mathcal{A}$ は行列の代数 $M(n, \boldsymbol{C})$ と同型になる．この同型は（表現と考えて）既約であり，自己同型を無視すれば一意的に定まる．また $\mathcal{A}$ の自己同型はすべて内部同型（すなわち $x \longrightarrow \theta x \theta^{-1}$ の形）になっている．

この Wedderburn の定理は Clifford 代数には好都合の定理である．すなわち定理 2, 3, 4 によって

$$m \text{ が偶数のときの } \mathcal{C}, \qquad m \text{ が奇数のときの } \mathcal{C}^+$$

はちょうど上の $\mathcal{A}$ の条件をみたしていることがわかる．

さて $m = 2l$ とすれば $\mathcal{C}$ の次元は $2^{2l} = (2^l)^2$ であるから $\mathcal{C}$ は $M(2^l, \boldsymbol{C})$ と同型になるはずである．同様にして $m = 2l + 1$ のときは $\mathcal{C}^+$ は $M(2^l, \boldsymbol{C})$ と同型になるはずである．以下にこの同型写像を具体的に作るのであるが，まずこの同型写像を $\varDelta$ で表す．すなわち

$$\varDelta: \quad \mathcal{C} \longrightarrow M(2^l, \boldsymbol{C}) \qquad (m = 2l \text{ のとき})$$

$$\varDelta: \quad \mathcal{C}^+ \longrightarrow M(2^l, \boldsymbol{C}) \qquad (m = 2^l + 1 \text{ のとき})$$

とする．この $\varDelta$ のことをそれぞれの $\mathcal{C}$ および $\mathcal{C}^+$ のスピン表現という．

定理 8. （テンソル積定理）　いま $(V, B) = (V_1, B_1) \oplus (V_2, B_2)$ とする．すなわち V_1 と V_2 とは B について直交しており，$B_i = B | V_i$ となっている．このとき $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ はそれぞれ $(V, B), (V_1, B_1), (V_2, B_2)$ の Clifford 代数とする．

いま $\mathcal{C}_1$ の α をやはり α でかくとき，$\mathcal{C}_1$ の元 θ で次の条件をみたすものが存在するとする：

$$x \in \mathcal{C}_1 \implies \alpha(x) = \theta x \theta^{-1}, \qquad \theta^2 = 1$$

このとき次の式が成立する：

$$C \simeq C_1 \otimes C_2$$

ここに $\otimes$ は普通のテンソル積である．実際にこの同型対応を ψ とかけば ψ は次の式によって定義される：

$$\psi(u) = \begin{cases} u \otimes 1 & (u \in V_1 \text{ のとき}) \\ \theta \otimes u & (u \in V_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

［証明］ V の基底 $u_1, \cdots, u_m$ を $u_1, \cdots, u_r$ が V_1 の基底で $u_{r+1}, \cdots, u_m$ が V_2 の基底であるように選ぶ．ψ を定理で定義されたように選ぶ，すなわち

$$\psi(u_i) = u_i \otimes 1 \qquad (i = 1, \cdots, r)$$
$$\psi(u_i) = \theta \otimes u_i \qquad (i = r+1, \cdots, m)$$

このとき $i, j \leq r$ とすれば次の計算が成立する：

$$\begin{aligned} \psi(u_i)\psi(u_j) + \psi(u_j)\psi(u_i) &= u_i u_j \otimes 1 + u_j u_i \otimes 1 \\ &= (u_i u_j + u_j u_i) \otimes 1 = 2B(u_i, u_j) \end{aligned}$$

次に $r < i, j \leq m$ とすれば

$$\begin{aligned} \psi(u_i)\psi(u_j) + \psi(u_j)\psi(u_i) &= \theta^2 \otimes (u_i u_j + u_j u_i) \\ &= 1 \otimes 2B(u_i, u_j) = 2B(u_i, u_j) \end{aligned}$$

次に $i \leq r < j$ とすれば

$$\begin{aligned} &\psi(u_i)\psi(u_j) + \psi(u_j)\psi(u_i) \\ &= (u_i \otimes 1)(\theta \otimes u_j) + (\theta \otimes u_j)(u_i \otimes 1) \\ &= u_i\theta \otimes u_j + (\theta u_i) \otimes u_j = (u_i\theta + \theta u_i) \otimes u_j \end{aligned}$$

ところで $\alpha(u_i) = -u_i$ すなわち $\theta u_i \theta^{-1} = -u_i$ したがって $u_i\theta + \theta u_i = 0$ であるから

$$\psi(u_i)\psi(u_j) + \psi(u_j)\psi(u_i) = 0 = 2B(u_i, u_j)$$

となる．したがって補題1により ψ を準同型に拡大することができる．この拡大された ψ の像は $V_1 \otimes 1$ を含んでいるから $C_1 \otimes 1$ を含んでいる．したがって $\theta \otimes 1$ を含んでいる．一方 ψ の像は $\theta \otimes V_2$ も含んでいる．ゆえに $\theta^2 \otimes V_2 = 1 \otimes V_2$ を含んでいる．したがって ψ は $C_1 \otimes C_2$ の上への準同型である．C と $C_1 \otimes C_2$ の次元は等しいから ψ が同型であることがわかる．■

さて $\dim V_1 = 2$ のときを考える．C に対応する行列の代数は $M(2, \boldsymbol{C})$ である．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 0$$

が成立する．さらに $\theta = \sigma_3$ を次の式でおけば

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

$$\theta\sigma_1\theta^{-1} = -\sigma_1, \qquad \theta\sigma_2\theta^{-1} = -\sigma_2, \qquad \theta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立する．$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は Pauli（パウリ）のスピン行列と呼ばれ物理ではおなじみである．

我々は V_1 の上の B の場合を分けて考える．

1)　$B(a_1u_1 + a_2u_2) = a_1{}^2 + a_2{}^2$　のとき．

このときは

$$u_1{}^2 = u_2{}^2 = 1, \qquad u_1u_2 + u_2u_1 = 0$$

となるから

$$\Delta(u_1) = \sigma_1, \qquad \Delta(u_2) = \sigma_2$$

ととれば

$$\Delta(\alpha(u_i)) = \Delta(-u_i) = -\sigma_i = \theta\sigma_i\theta^{-1}$$

となるから一般に次の式が成立する：

$$\Delta(\alpha(x)) = \theta\,\Delta(x)\theta^{-1}$$

これから Δ が同型写像で α が内部同型であることがわかる．

2)　$B(a_1u_1 + a_2u_2) = a_1{}^2 - a_2{}^2$　のとき．

このときは次の形となる．

$$u_1{}^2 = 1, \qquad u_2{}^2 = -1, \qquad u_1u_2 + u_2u_1 = 0$$

このときは次のようにおく：

$$\Delta(u_1) = \sigma_1, \qquad \Delta(u_2) = i\sigma_2$$

前と同様に次の式が成立するから，すべてが満足されている：

$$\Delta(\alpha(x)) = \theta\,\Delta(x)\theta^{-1}$$

3)　$B(a_1u_1 + a_2u_2) = -a_1{}^2 - a_2{}^2$　のとき．

$\Delta(u_1) = i\sigma_1$, $\Delta(u_2) = i\sigma_2$　とおけばやはり

$$\Delta(\alpha(x)) = \theta\,\Delta(x)\theta^{-1}$$

4)　$B(a_1u_1 + a_2u_2) = 2a_1a_2$　のとき．

このときは $u_1{}^2 = u_2{}^2 = 0$, $u_1u_2 + u_2u_1 = 2$ である．次のように $\varDelta$ を定義する：

$$\varDelta(u_1) = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{\sqrt{2}}, \qquad \varDelta(u_2) = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{\sqrt{2}}$$

明らかに次の式が成立する：

$$(\varDelta(u_1))^2 = (\varDelta(u_2))^2 = 0, \qquad \frac{1}{2}(\varDelta(u_1)\varDelta(u_2) + \varDelta(u_2)\varDelta(u_1)) = 1$$

$$\varDelta(\alpha(x)) = \theta\varDelta(x)\theta^{-1}$$

系　$m = 2l$ で

$$(V, B) = (V_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (V_l, B_l)$$

で V_i はすべて次元が 2 とする．このとき (V, B), (V_i, B_i) の Clifford 代数をそれぞれ C, C_i とすれば

$$C \simeq C_1 \otimes \cdots \otimes C_l$$

となる．この同型写像 ψ は次の形となる：

$$\psi(x_r) = \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_{r-1} \otimes x_r \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

ここに $x_r \in V_r$ として θ_i はそれぞれの C_i のなかの θ であるものとする．

さらに $\varDelta_r : C_r \longrightarrow M(2, C)$ をスピン表現とすれば C のスピン表現 $\varDelta$ は次の形となる：

$$\varDelta = (\varDelta_1 \otimes \varDelta_2 \otimes \cdots \otimes \varDelta_l) \circ \psi$$

ここにトリビアルなことを付け加えれば次の式が成立する：

$$M(2, \boldsymbol{C}) \otimes \cdots \otimes M(2, \boldsymbol{C}) \simeq M(2^l, \boldsymbol{C}) \simeq \mathrm{End}(\boldsymbol{C}^2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{C}^2)$$

さて $\theta = \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_l \in C_1 \otimes \cdots \otimes C_l$ と定義すればもちろん次の式が成立する：

$$\theta^2 = 1, \qquad \theta\psi(u)\theta^{-1} = -\psi(u) = \alpha(\psi(u))$$

したがって C の主対合は内部同型で θ から作られる．したがって Clifford 代数は m が偶数のときはすべてこの性質をもっている．▯

次に $m = 2l + 1$ の場合を考えよう．

$$(V, B) = (V', B') \oplus (V'', B'')$$

として $\dim V' = 2l$, $\dim V'' = 1$ とする．

いま C, C', C'' をそれぞれ $(V, B), (V', B'), (V'', B'')$ の Clifford 代数とする．このとき C' の主対合は内部同型で

$$\alpha(x) = \theta\, x\, \theta^{-1}, \qquad \theta^2 = 1$$

となっている．したがってテンソル積定理により

$$C \simeq C' \otimes C''$$

が成立して，その同型対応は次の ψ によって得られる：

$$\psi(u') = u' \otimes 1, \qquad \psi(u'') = \theta \otimes u''$$

ここに $u' \in V'$, $u'' \in V''$ とする．いま Δ' を C' のスピン表現とする．すなわち

$$\Delta' : \quad C' \longrightarrow M(2^l, \boldsymbol{C})$$

このとき $(\Delta' \otimes 1) \circ \psi$ は C の $M(2^l, \boldsymbol{C})$ への表現になっている．いま Δ を次の式で定義する：

$$\Delta = (\Delta' \otimes 1) \circ \psi | C^+$$

このとき Δ がスピン表現であることを証明する．

Δ の表現空間は 2^l 次元であり，C^+ は単純であり，C^+ の表現空間は 2^l の倍数となるから Δ は表現空間の次数が最小となるただ一つの表現になっており，この場合スピン表現になっている．この場合 Δ は C 全体に自然な拡大をもっている．

$\mathfrak{o}(V, B)$ のスピン表現

さてリー代数 $\mathfrak{o}(V, B)$ は次の形である：

$$\mathfrak{o}(V,B) = \{A \in \mathrm{End}\, V | B(Au, v) + B(u, Av) = 0 \text{ がすべての } u, v \in V \text{ に対して成立する}\}$$

いま次の形になっているとする：

$$(V, B) = \begin{cases} (V_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (V_l, B_l) & (m = 2l \text{ のとき}) \\ (V_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (V_l, B_l) \oplus (V_{l+1}, B_{l+1}) & (m = 2l+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで $\dim V_i = 2$ $(1 \leq i \leq l)$ で $\dim V_{l+1} = 1$ とする．V_j の基底 $u_j^{\pm} (j \leq l)$ と V_{l+1} の基底 u_{l+1} を選んで次の条件が成立しているようにする：

$$B(u_j^{\pm}) = 0, \qquad B(u_j^+, u_j^-) = 1, \qquad B(u_{l+1}) = 1$$

このとき Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は次の形となる：

$$\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{o}(V,B) \,|\, AV_j \subseteq V_j \text{ がすべての } j \text{ に対して成立する}\}$$

このとき $\mathfrak{h}$ の基底 $D_j (j = 1, 2, \cdots, l)$ を次のように選ぶことができる：

$$D_j u_j^{\pm} = \pm u_j^{\pm}, \qquad D_j u_i = 0 \qquad (i \neq j)$$

一般の D は次の形に表すことができる：

$$D = \sum \varepsilon_j D_j$$

D_j は次の形で表すこともできる：

$$D_j v = B(v, u_j^-)u_j^+ - B(v, u_j^+)u_j^-$$

ルートは次の形からわかる．まず $m = 2l$ のときは $i \neq j$ のすべての i, j について次の定義をする：

$$X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} v = B(v, u_j^-)u_i^+ - B(v, u_i^+)u_j^-$$

$$X_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} v = B(v, u_j^+)u_i^+ - B(v, u_i^+)u_j^+$$

$$X_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)} v = B(v, u_j^-)u_i^- - B(v, u_i^-)u_j^-$$

もし $m = 2l + 1$ のときはさらに次の定義をする：

$$X_{\varepsilon_i} v = B(v, u_{l+1})u_i^+ - B(v, u_i^+)u_{l+1}$$

$$X_{-\varepsilon_i} v = B(v, u_{l+1})u_i^- - B(v, u_i^-)u_{l+1}$$

このとき計算から次のことが明らかである．ここに D は $D = \sum \varepsilon_i D_i$ とする：

$$[D, X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)X \qquad ([D, X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}]v \text{ を計算してみよ})$$

$$[D, X_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}] = (\varepsilon_i + \varepsilon_j)X, \qquad [D, X_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)}] = -(\varepsilon_i + \varepsilon_j)X$$

$$[D, X_{\varepsilon_i}] = \varepsilon_i X_{\varepsilon_i}, \qquad [D, X_{-\varepsilon_i}] = -\varepsilon_i X_{-\varepsilon_i}$$

$\mathfrak{o}(V, B)$ の Weyl 群は $m = 2l$ のときは $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l$ の置換とその偶数個の符号の変化とでできている．$m = 2l + 1$ のときの Weyl 群は $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l$ の置換と任意個の符号の変化からできている．

$m = 2l$ のときの基本的ウェイトは

$$\lambda_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i \qquad (1 \leq i \leq l - 2)$$

$$\lambda_{l-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l), \qquad \lambda_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_l)$$

であり $m = 2l + 1$ のときは

$$\lambda_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i \qquad (1 \leq i \leq l - 1)$$

$$\lambda_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_l)$$

となる．Weyl の次元公式から λ_i の表現空間の次元を $\dim \lambda_i$ で表せば

$m = 2l$　のときは　$\dim \lambda_{l-1} = \dim \lambda_l = 2^l$

$m = 2l + 1$　のときは　$\dim \lambda_l = 2^l$

さて Clifford 代数のスピン表現を $m=2l$ として

$$\varDelta:\quad C \longrightarrow M(2^l, \boldsymbol{C})$$

とかいて $\varDelta$ を $C^\times$ に制限すれば $C^\times$ の表現を得る．ところで $C^\times$ のリー代数は C であるから微分表現

$$d\varDelta:\quad C \longrightarrow M(2^l, \boldsymbol{C})$$

を得る．いま $x\in C$，$\exp tx = \sum \dfrac{1}{n} t^n x^n$ であるから

$$\varDelta(\exp tx) = \sum \frac{t^n}{n!}\varDelta(x)^n = \exp t\varDelta(x)$$

となる．したがって

$$d\varDelta:\quad x \longrightarrow \varDelta(x)$$

となっている．すなわちリー代数の準同型もやはり $\varDelta$ によって与えられている．

いま $\mathfrak{o}(V,B)$ のスピン表現

$$\pi:\quad \mathfrak{o}(V,B) \longrightarrow M(2^l, \boldsymbol{C})$$

を，ρ と $d\rho$ とをそれぞれ p. 217，p. 231 に定義されたものとして次の式によって定義する：

$$\pi(A) = \varDelta((d\rho)^{-1}A) \qquad (A\in\mathfrak{o}(V,B))$$

$m=2l+1$ のときは，$\Gamma^+\subseteq C^+$ で Γ^+ は Γ の連結成分であるからやはり $A\in\mathfrak{o}(V,B)$ に対して

$$\pi(A) = \varDelta((d\rho)^{-1}A)$$

とスピン表現を定義することができる．

まず一番簡単な場合 $\dim V=2$ の場合を考えることにする．このとき u^+, u^- を V の基底で次の条件をみたすものとする：

$$B(u^+) = B(u^-) = 0, \qquad B(u^+, u^-) = 1$$

(V,B) の Clifford 代数 C はもちろん 4 次元であって $1, u^+, u^-$，u^+u^- で張られる，次の関係が成立する：

$$(u^+)^2 = (u^-)^2 = 0, \qquad u^+u^- + u^-u^+ = 2$$

θ を次の式によって定義する：

$$\theta = -1 + u^+u^-$$

明らかに次の式が成立する：

$$\theta^2 = 1, \qquad \alpha(x) = \theta\, x\, \theta^{-1}$$

γ^+ と γ^- とを次の式で定義する：

$$\gamma^+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \gamma^- = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

このとき $(\gamma^\pm)^2 = 0$ で $\gamma^+\gamma^- + \gamma^-\gamma^+ = 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ となるから，次の準同型（実は同型）が存在する：

$$\Delta:\quad C \longrightarrow M(2, C)$$
$$\Delta(u^\pm) = \gamma^\pm$$

ここで次の関係が成立する：

$$\Delta(a + bu^+ + cu^- + du^+u^-) = \begin{pmatrix}a+2d & \sqrt{2}b\\ \sqrt{2}c & a\end{pmatrix}$$

$$\Delta(\theta) = \Delta(-1 + u^+u^-) = -E + \gamma^+\gamma^- = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{End}\,V$ の元を u^+, u^- を基底にとって表される行列で表すことにすれば

$$\Delta:\quad C \longrightarrow \mathrm{End}\ V$$

さて $\mathfrak{o}(V, B) = CD$ ここに $D \in \mathrm{End}\ V$ であって，その行列は u^+, u^- の基底をとれば次の形になっている：

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

さて $u, v, w \in V$ について次の式が成立する（p. 231 を参照）：

$$d\rho(uv)w = 2B(w, v)u - 2B(v, u)v$$

これから次のことがわかる：

$$d\rho(u^+u^-) = 2D$$

ところで $\ker dN$ の元で D となる元は $-1 + u^+u^-$ であるから次のことがわかる（p. 231 を参照）：

$$(d\rho)^{-1}D = \frac{1}{2}(-1 + u^+u^-)$$

かくして $\pi(D)$ が次の形であることがわかった：

$$\pi(D) = \Delta\left(\frac{-1 + u^+u^-}{2}\right) = \frac{1}{2}D$$

次に $m = 2l$ の場合を考えて，いままでのように

$$(V, B) = (V_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (V_l, B_l)$$

とすれば Δ は次の形である：

$$\Delta = (\Delta_1 \otimes \cdots \otimes \Delta_l) \circ \phi$$

ここに Δ_j は (V_j, B_j) の Clifford 代数のスピン表現である．

さて (V_j, B_j) について u_j^+, u_j^- は前と同じとする．すなわち $B_j(u_j^\pm) = 0$, $B(u_j^+, u_j^-) = 1$ とする．いま End V_j を $M(2, C)$ と同一視して End V_j の元を u_j^+, u_j^- を基底ととった行列で表せばスピン表現は次の形になっている：

$$\Delta_j(u_j^+) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_j^+$$

$$\Delta_j(u_j^-) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_j^-$$

一般に次の形となる：

$$\Delta_j(a + bu_j^+ + cu_j^- + du_j^+u_j^-) = \begin{pmatrix} a + 2d & \sqrt{2}\,b \\ \sqrt{2}\,c & a \end{pmatrix}$$

θ_j を次の形で定義する：

$$\theta_j = -1 + u_j^+u_j^-$$

このとき $\theta_j^2 = 1$ となり $\Delta_j(\theta_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となって

$$x \in C_j \implies \alpha(x) = \theta_j\, x\, \theta_j^{-1}$$

となる．ここに C_j は (V_j, B_j) の Clifford 代数とする．$\theta_j \in \ker dN$ であって次の式が成立する：

$$d\rho(\theta_j) = \frac{1}{2}D_j$$

さて Δ の表現空間を次のように考える：

$$\mathrm{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_l) \simeq \mathrm{End}\, V_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}\, V_l \simeq M(2^l, C)$$

そうすれば

$$\Delta(\theta_j) = \Delta(-1 + u_j^+u_j^-) = -E + \Delta(u_j^+)\Delta(u_j^-)$$

ここに E は単位行列である．さて

$$\begin{aligned} \Delta(u_j^+)\Delta(u_j^-) &= (\Delta_1(\theta_1) \otimes \cdots \otimes \Delta_{j-1}(\theta_{j-1}) \otimes \Delta_j(u_j^+) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \\ &\quad \cdot (\Delta_1(\theta_1) \otimes \cdots \otimes \Delta_{j-1}(\theta_{j-1}) \otimes \Delta_j(u_j^-) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \\ &= \Delta_1(\theta_1^2) \otimes \cdots \otimes \Delta_{j-1}(\theta_{j-1}^2) \otimes \Delta_j(u_j^+u_j^-) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ &= 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \Delta_j(u_j^+u_j^-) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \end{aligned}$$

これから直ちに

$$\varDelta(\theta_j) = E \otimes \cdots \otimes E \otimes \varDelta_j(\theta_j) \otimes E \otimes \cdots \otimes E$$
$$= E \otimes \cdots \otimes E \otimes \frac{1}{2}D_j \otimes E \otimes \cdots \otimes E$$

これから次のことがわかる：

$$\pi(D_j) = \varDelta((d\rho)^{-1}D_j) = E \otimes \cdots \otimes E \otimes \frac{1}{2}D_j \otimes E \otimes \cdots \otimes E$$

さて $V_1 \otimes \cdots \otimes V_l$ の基底は次の形の 2^l 個である．

$$u_1^{\pm} \otimes \cdots \otimes u_l^{\pm}$$

これは Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ のウェイトベクトルであり，対応するウェイトは

$$\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm\varepsilon_2 \pm \cdots \pm\varepsilon_l)$$

になっている．

すべてのウェイトの重複度は 1 であり，Weyl 群をウェイトの集合で次の 2 つに分けることができる．1 つは偶数個の符号をかえるものであり，もう 1 つは奇数個の符号をかえるものである．

さて $\pi(D_j) = \varDelta(\theta_j)$ である．したがって表現 π についてスピン表現にでてくるウェイトは

$$\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm\varepsilon_2 \pm \cdots \pm\varepsilon_l)$$

である．したがって π と $\lambda_{l-1} \oplus \lambda_l$ とは同じウェイトと同じ重複度をもっている．したがって π と $\lambda_{l-1} \oplus \lambda_l$ とは同等であることがわかる．すなわち次の式が成立する：

$$\pi \sim \lambda_{l-1} \oplus \lambda_l$$

ここで偶数個の符号の変化をもった $\pm\varepsilon_1 \pm\varepsilon_2 \pm \cdots \pm\varepsilon_l$ のウェイトで張られる部分空間が λ_l に対応する部分空間であることがわかる．

次に $m = 2l+1$ の場合を考えよう．この場合は

$$(V, B) = (V_1, B_1) \oplus \cdots \oplus (V_l, B_l) \oplus (V_{l+1}, B_{l+1})$$

を前と同じ意味において，スピン表現

$$\varDelta : \quad C \longrightarrow \mathrm{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_l \otimes V_{l+1})$$

は次の形である：

$$\varDelta = (\varDelta_1 \otimes \cdots \otimes \varDelta_l \otimes E) \circ \psi$$

ここに $V_1 \otimes \cdots \otimes V_l \otimes V_{l+1}$ の基底は次のものである：

$$u_1^{\pm} \otimes u_2^{\pm} \otimes \cdots \otimes u_l^{\pm} \otimes u_{l+1}$$

これは次のウェイトをもったウェイトベクトルである：

$$\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \varepsilon_l)$$

これはまた λ_l のウェイトである．したがって

$$\pi \sim \lambda_l$$

がでてくる．

具体的なスピン表現

ここで $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のスピン表現の具体的な形を求めることにする．

まず次元 m の複素線形空間からできる Clifford 代数についての注意から始める．いまこの線形空間の基底を $u_1, \cdots, u_m$ とかくことにして，対称双一次形式 B_0 は次の形で表される：

$$B_0(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j) = \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_j$$

$$g_{ij} = g_{ji}$$

したがって B_0 は (g_{ij}) の行列によって表される．この Clifford 代数が便利なことは，たとえば

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のときは

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1 + \frac{\partial}{\partial y}u_2 + \frac{\partial}{\partial z}u_3\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

となり

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のときは

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}u_0 + \frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}u_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}u_3\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

となることから明らかであろう.

複素線形空間で対称双一次形式が非退化のときはどの対称双一次形式をとっても同じであるから以下に一番簡単なものとして次のものをとる：

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

この場合 Clifford 代数の基本的な規則は次のものとなる：

$$u_i^2 = 1, \qquad u_i u_j + u_j u_i = 0 \qquad (i \neq j)$$

これを1つの式で表せば次のものとなる：

$$u_i u_j + u_j u_i = 2\delta_{ij}$$

以下にこの形式で Clifford 代数を取り扱うことにして，スピン表現の具体的な形を求めるために，まず Pauli（パウリ）のスピン行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義することにする. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は $\mathfrak{sl}(2, C)$ の生成元になっており，自己共役で次の式をみたす：

$$\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 = \sigma_3{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \qquad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \qquad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$$

$$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \qquad (i \neq j)$$

いま C^2 と同型な l 個の複素線形空間 $V_1, V_2, \cdots, V_l$ を考え，V を次の式で定義する：

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_l$$

明らかに V の次元は 2^l になっている. いま V_i についての Pauli のスピン行列を $\sigma_1{}^i$, $\sigma_2{}^i, \sigma_3{}^i$ で表すことにする.

いま $V_1, \cdots, V_l$ の上の線形写像 $A_1, \cdots, A_l$ からテンソル積 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_l$ で得られる V の上の線形写像を単に $A_1 \cdots A_l$ でかくことにする. さらに $A_1 \cdots A_l$ のなかに恒等写像が入っていればその恒等写像は抜かしてかくことにする. いま V_i の上の恒等写像は $\sigma_0{}^i$ で表すことにする. すなわち $\sigma_1{}^l$ は詳しくは

$$\sigma_1{}^l = \sigma_0{}^1 \cdots \sigma_0{}^{l-1} \sigma_1{}^l$$

となる. $\sigma_j{}^i$ の形のものの積に関する限りはどの V_i に対する写像かがはっきりしているから問題はない. したがって $\sigma_k{}^i \sigma_l{}^j$ で $i \neq j$ のときは $\sigma_k{}^i \sigma_l{}^j$ の代りに $\sigma_l{}^j \sigma_k{}^i$ とかいても同じことになっている. すなわち $i \neq j$ のときは $\sigma_k{}^i$ と $\sigma_l{}^j$ とは交換可能であると思っ

てよい.

以下すべて V の上の線形写像（または $2^l\times 2^l$ の行列）を考えているものとする，すなわち End(V) の元である. いま $\gamma_1,\cdots,\gamma_{l2+1}$ を次のものと定義する：

$$\gamma_1=\sigma_2{}^1\sigma_3{}^2\cdots\sigma_3{}^l,\qquad \gamma_2=-\sigma_1{}^1\sigma_3{}^2\cdots\sigma_3{}^l$$
$$\gamma_3=\sigma_2{}^2\sigma_3{}^3\cdots\sigma_3{}^l,\qquad \gamma_4=-\sigma_1{}^2\sigma_3{}^3\cdots\sigma_3{}^l$$
$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$
$$\gamma_{2l-1}=\sigma_2{}^l,\qquad \gamma_{2l}=-\sigma_1{}^l$$
$$\gamma_{2l+1}=\sigma_3{}^1\sigma_3{}^2\cdots\sigma_3{}^l$$

$i\neq j$ ならば $\sigma_k{}^i$ と $\sigma_n{}^j$ とが交換可能なことと $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ の計算規則から容易に

$$\gamma_j\gamma_k+\gamma_k\gamma_j=2\delta_{jk}\qquad (j,k=1,\cdots,2l+1)$$

であることがわかる. これから補題1により $u_1,\cdots,u_{2l+1}$ から $u_iu_j+u_ju_i=2\delta_{ij}$ によって作られた Clifford 代数 C から，$\gamma_1,\cdots,\gamma_{2l+1}$ から生成された行列の代数（これは結局 V の上のすべての線形写像すなわち End(V) になっていることは明らかになるが）への準同型 φ で

$$\varphi(u_i)=\gamma_i$$

になるものが存在することがわかる.

いま C^+ の φ による像がちょうど End(V) になっていることをいう. このためには $\gamma_i\gamma_j$ の形の全体が End(V) を生成することをいえばよい.

まず $\gamma_{2l+1}\gamma_1,\cdots,\gamma_{2l+1}\gamma_{2l-2}$ を考えることによって次の形が $\varphi(C^+)$ に入っていることがわかる：

$$\sigma_1{}^1\quad \sigma_3{}^1\sigma_1{}^2\quad \sigma_3{}^1\sigma_3{}^2\sigma_1{}^3\quad\cdots\cdots\quad \sigma_3{}^1\sigma_3{}^2\cdots\sigma_3{}^{l-1}\sigma_1{}^l$$
$$\sigma_2{}^1\quad \sigma_3{}^1\sigma_2{}^2\quad \sigma_3{}^1\sigma_3{}^2\sigma_2{}^3\quad\cdots\cdots\quad \sigma_3{}^1\sigma_3{}^2\cdots\sigma_3{}^{l-1}\sigma_2{}^l$$

$\sigma_1{}^1\sigma_2{}^1$ によって $\sigma_3{}^1$ が $\varphi(C^+)$ に入っていることがわかるから，これと $\sigma_3{}^1\sigma_1{}^2,\sigma_3{}^1\sigma_2{}^2$ とによって $\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2$ が $\varphi(C^+)$ に入っていることがわかる. これから順々にすべての $\sigma_j{}^i$ が $\varphi(C^+)$ に入っていることがわかる. $\sigma_j{}^i$ は End(V_i) を生成するから End(V_1) $\otimes\cdots\otimes$ End(V_l) すなわち（次元を数えてみればすぐわかるように）End(V) 全体を生成する.

ところで C^+ も End(V) も共に次元が 2^{2l} であるから φ が同型写像であることがわかる. $\tilde{V}^2$ は C^+ に含まれるから $\mathfrak{o}(2l+1)$ は

$$M_{ij}=[\gamma_i,\gamma_j]$$

から $\sum a_{ij}M_{ij}$ の全体として作られる End(V) の部分リー代数と同型であることがわか

る.

すなわち $\mathfrak{o}(2l+1)$ のスピン表現は End(V) を表現空間として $\tilde{V}^2$ の元，すなわち $\sum a_{ij}M_{ij}$ を End(V) の元に行列として左から掛けてできる表現になっている.

ここで具体的な形を求めたスピン表現は $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ を次の形で考えている：

$$X \in \mathfrak{o}(2l+1, C) \iff {}^tX + X = 0$$

いまこの形にしたがって前の理論をかき直してみる．まず M_{ij} を次の形で定義する：

$$M_{ij} = E_{i,j} - E_{j,i} \qquad (i < j)$$

明らかに M_{ij} が $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ の基底となっている．この M_{ij} のなかの特別なものを次の H_i で表す.

$$H_i = M_{2i-1,2i} \qquad (i = 1, \cdots, l)$$

$H_i(i = 1, \cdots, l)$ が Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の基底になっていることは前と同様にわかる．今後 M_{ij} は H_i の形でない M_{ij} のこととする．この約束の上でさらに次の交換関係が成立する：

$$[H_i, M_{2i-1,k}] = -M_{2i,k}, \qquad [H_i, M_{j,2i-1}] = -M_{j,2i}$$
$$[H_i, M_{2i,k}] = M_{2i-1,k}, \qquad [H_i, M_{j,2i}] = M_{j,2i-1}$$

したがって $\Lambda_i''(H)$ で H の $(2i-1,\ 2i)$ の成分を表すことにすれば $H \in \mathfrak{h}$ なる H について

$$H = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i''(H) H_i$$

が成立するから次の関係が成立する．以下 $i < j$ とする：

$$[H, M_{2i-1,2j-1}] = -\Lambda_i''(H) M_{2i,2j-1} - \Lambda_j''(H) M_{2i-1,2j}$$
$$[H, M_{2i-1,2j}] = -\Lambda_i''(H) M_{2i,2j} + \Lambda_j''(H) M_{2i-1,2j-1}$$
$$[H, M_{2i,2j-1}] = \Lambda_i''(H) M_{2i-1,2j-1} - \Lambda_j''(H) M_{2i,2j}$$
$$[H, M_{2i,2j}] = \Lambda_i''(H) M_{2i-1,2j} + \Lambda_j''(H) M_{2i,2j-1}$$

これから η, η' をそれぞれ ± 1 のいづれかとすれば

$$\alpha = i(\eta\Lambda_i'' + \eta'\Lambda_j'') \qquad (i < j)$$

とするとき X_α を

$$X_\alpha = M_{2i-1,2j-1} + i\eta M_{2i,2j-1} + i\eta' M_{2i-1,2j} - \eta\eta' M_{2i,2j}$$

とすれば

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$$

が得られる．

さらに β を

$$\beta = i\eta \Lambda_i''$$

とおいて X_β を次の形とすれば

$$X_\beta = M_{2i-1,2l+1} + i\eta M_{2i,2l+1}$$

$$[H, X_\beta] = \beta(H)X_\beta$$

となるから $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のすべてのルートが次の $2l^2$ の元であることがわかる：

$$i(\eta\Lambda_i'' + \eta'\Lambda_j'') \qquad (1 \leq i < j \leq l)$$

$$i\eta\Lambda_i'' \qquad (1 \leq i \leq l)$$

したがって単純ルートとしては

$$\alpha_i = i(\Lambda_i'' - \Lambda_{i+1}'') \qquad (i < l)$$

$$\alpha_l = i\Lambda_l''$$

をとればよい．正のルートは $i\Lambda_i''$, $i(\Lambda_i''+\Lambda_j'')$, $i(\Lambda_i''-\Lambda_j'')$ となりそれぞれ

$$i\Lambda_i'' = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l$$

$$i(\Lambda_i'' + \Lambda_j'') = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \cdots + 2\alpha_l \qquad (i < j)$$

$$i(\Lambda_i'' - \Lambda_j'') = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \qquad (i < j)$$

となる．以上すべて ${}^tXF + FX = 0$ の形で得たものと全く同じになっている．したがって基本的ウェイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ は次の形が得られる：

$$\lambda_i = i(\Lambda_1'' + \cdots + \Lambda_i'')$$

$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \cdots + \alpha_l) \qquad (i < l)$$

$$\lambda_l = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + l\alpha_l)$$

$$= \frac{1}{2}i(\Lambda_1'' + \cdots + \Lambda_l'')$$

さらに X_i としては $i < l$ ならば

$$X_i = M_{2i-1,2i+1} + iM_{2i,2i+1} - iM_{2i-1,2i+2} + M_{2i,2i+2}$$

であり X_l は次のものとなる：

$$X_l = M_{2l-1,2l+1} + iM_{2l,2l+1}$$

§ 19.　$\mathfrak{o}(2l, C)$ の基本的既約表現

$\mathfrak{o}(2l, C)$ は §17 で証明したように半単純複素線形リー代数になっている．また F として

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ E_l & 0 \end{pmatrix}$$

をとって　$\mathfrak{o}(2l, C) = \{X \in \mathfrak{gl}(2l, C) \mid FX = -{}^tXF\}$　としてよい．いま $X \in \mathfrak{o}(2l, C)$ として，X を次の形とする：

$$X = \begin{pmatrix} P & Q \\ M & N \end{pmatrix}$$

このとき $FX = -{}^tXF$ から直ちに次の式を得る：

$$Q = -{}^tQ, \qquad M = -{}^tM, \qquad P = -{}^tN$$

これから前と同じく $\mathfrak{o}(2l, C)$ の基底は次の形にとればよいことがわかる：

$$E_{i,i} - E_{l+i,l+i} \qquad (1 \leq i \leq l)$$

$$E_{i,j} - E_{l+j,l+i} \qquad (1 \leq i \neq j \leq l)$$

$$E_{i,l+j} - E_{j,l+i} \qquad (1 \leq i < j \leq l)$$

$$E_{i+l,j} - E_{j+l,i} \qquad (1 \leq j < i \leq l)$$

これから $\mathfrak{o}(2l, C)$ の複素次元が $2l^2 - l$ であることがわかる．

$\mathfrak{o}(2l, C)$ の元で対角線以外は 0 となっているものの全体を $\mathfrak{h}$ とかくことにする．明らかに $\mathfrak{h}$ の基底は

$$E_{i,i} - E_{l+i,l+i} \qquad (1 \leq i \leq l)$$

であって，§17 と同じようにこの $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{o}(2l, C)$ の Cartan 部分代数であることがわかる．

いま前と同じく $\mathfrak{h}$ の元 H に対してその対角線の i 番目の元を H に対応させる関数を $\Lambda_i(H)$ とおけば，すべての $\mathfrak{h}$ の元 H に対して次の関係式が成立する：

$$H = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i(H)(E_{i,i} - E_{l+i,l+i})$$

これから §17 と同じような計算で $\mathfrak{o}(2l, C)$ の 0 でないルートの全体 Φ は

$$\Phi = \{\pm(\Lambda_i + \Lambda_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm(\Lambda_i - \Lambda_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

と $2(l^2 - l)$ 個の元から成っている．

いま $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ を次の式で定義する：

$$1 \leq i \leq l-1 \quad ならば \qquad \alpha_i = \Lambda_i - \Lambda_{i+1}$$

$$\alpha_l = \Lambda_{l-1} + \Lambda_l$$

このとき

$$\Lambda_i + \Lambda_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l \qquad (1 \leq i < j \leq l-2)$$

$$\Lambda_i + \Lambda_{l-1} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l \qquad (1 \leq i \leq l-2)$$

$$\Lambda_i + \Lambda_l = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_l \qquad (1 \leq i \leq l-2)$$

$$\Lambda_i - \Lambda_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1} \qquad (1 \leq i < j \leq l)$$

となるから $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ が Φ の基本系であって Φ^+ が $\Lambda_i + \Lambda_j (1 \leq i < j \leq l)$, $\Lambda_i - \Lambda_j (1 \leq i < j \leq l)$ から成ることがわかる.

これから §17 と同じように計算すれば

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \qquad (|i-j| \geq 2,\ 1 \leq i, j \leq l-1 \text{ のとき})$$

$$(\alpha_{l-2}, \alpha_l) = -\frac{1}{4(l-1)}$$

$$(\alpha_i, \alpha_j) = -\frac{1}{4(l-1)} \qquad (|i-j| = 1,\ 1 \leq i, j \leq l-1 \text{ のとき})$$

$$(\alpha_i, \alpha_l) = 0 \qquad (1 \leq i \leq l-3 \text{ または } i = l-1 \text{ のとき})$$

$$(\alpha_i, \alpha_i) = \frac{1}{2(l-1)} \qquad (1 \leq i \leq l \text{ のとき})$$

となる. これから $\mathfrak{o}(2l, C)$ の Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 & & \\ & -1 & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & -1 & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & 0 & & & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

であることがわかり, $\mathfrak{o}(2l, C)$ は D_l 型であることがわかる. $D_3 = A_3$ であるから以下 $l \geq 4$ とする.

$\mathfrak{o}(2l, C)$ の Weyl 群 $\mathcal{W}$ を考えるために σ_{α_i} を σ_i とかくことにする.

σ_i の $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$ に対する操作は, $i \neq l$ ならばこれは Λ_i と Λ_{i+1} とをとりかえ, あとはかえない互換になっている. σ_l は $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_{l-2}$ は不変で

$$\sigma_l(\Lambda_{l-1}) = -\Lambda_l, \qquad \sigma_l(\Lambda_l) = -\Lambda_{l-1}$$

で Λ_{l-1}, Λ_l とについては互換のうえ－をつける操作になっている．したがって $\mathcal{W}$ の元は $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$ を適当に $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l$ に置換したうえ，そのうちの偶数個の元に－をつける操作になっている．すなわち $\mathcal{W}$ は $\mathfrak{S}_l$ と $(\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{l-1}$ の半直積になっている．

§17 と同じように $H_1, \cdots, H_l$ を計算すれば

$$H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} - E_{l+i,l+i} + E_{l+i+1,l+i+1} \qquad (1 \leq i \leq l-1)$$

$$H_l = E_{l-1,l-1} - E_{2l-1,2l-1} + E_{l,l} - E_{2l,2l}$$

これから $\mathfrak{o}(2l, C)$ の基本的な整ウェイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ を計算すれば次の式を得る：

$$\lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \cdots + \alpha_{l-2}) + \frac{1}{2}i(\alpha_{l-1} + \alpha_l) \qquad (i < l-1)$$

$$\lambda_{l-1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}l\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_l\right)$$

$$\lambda_l = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}l\alpha_l\right)$$

次に $\mathfrak{o}(2l, C)$ の Cartan 分解の様子を調べることにする．$1 \leq i \leq l-1$ とすれば $\alpha_i = \Lambda_i - \Lambda_{i+1}$ であるから L_{α_i} の生成元として次の X_i をとればよいことがわかる：

$$X_i = E_{i,i+1} - E_{l+i+1,l+i}$$

ここで H_i の形を考えれば $Y_i = Y_{\alpha_i}$ としては

$$Y_i = E_{i+1,i} - E_{l+i,l+i+1}$$

をとればよいことがわかる．

さて $i = l$ の場合は $\alpha_l = \Lambda_{l-1} + \Lambda_l$ であるから X_l としては次のものをとればよい：

$$X_l = E_{l,2l-1} - E_{l-1,2l}$$

ここで　$H_l = E_{l-1,l-1} - E_{2l-1,2l-1} + E_{l,l} - E_{2l,2l}$　だから

$$Y_l = E_{2l-1,l} - E_{2l,l-1}$$

ととればよいことがわかる．

以下に基本的ウェイト λ_r に対する既約表現を構成することにする．まず $1 \leq r \leq l-2$ とする．C^{2l} を V として $\mathfrak{o}(2l, C)$ の恒等表現を (ρ, V) とする．§16, §17 と同じく V_r を V の r 個のテンソル積 $V \otimes \cdots \otimes V$ のなかの階数 r の交代テンソルの全体とする．前と同じく $[v_1, \cdots, v_r]$ の記号を用い

$$u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 番目}$$

で $u_1, \cdots, u_{2l}$ を V の基底とする．このとき $\tilde{\rho} = \rho \otimes \cdots \otimes \rho$ とすれば

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(H)[u_1, \cdots, u_r] &= (\Lambda_1(H) + \cdots + \Lambda_r(H))[u_1, \cdots, u_r] \\ &= \lambda_r(H)[u_1, \cdots, u_r] \end{aligned}$$

であり，さらに

$$\tilde{\rho}(X_i)[u_1, \cdots, u_r] = 0$$

は明らかであり，α を正のルートとすると X_α は $X_1, \cdots, X_l$ から交換子積で生成されるから，すべての X_α について

$$\tilde{\rho}(X_\alpha)[u_1, \cdots, u_r] = 0$$

となる．すなわち $[u_1, \cdots, u_r]$ は原始ベクトルになっている．したがって §15 の補題1によって $[u_1, \cdots, u_r]$ を含む $\tilde{\rho}$-不変な最小の部分空間を W とすれば $(\tilde{\rho}, W)$ が λ_r を最高のウェイトとする既約表現になっている．

さて Weyl の定理によって W の次元 N を計算すれば §15 の終りの公式に $m_j = \delta_{jr}$ を入れて

$$N = \prod_k \frac{\sum_{j=1}^{l} (\delta_{jr} + 1)k_j}{\sum_{j=1}^{l} k_j}$$

さて $k_1, \cdots, k_l$ の形は $k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l$ が次の形になるものがすべてである．

［I］ $\alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l \qquad (1 \leq i < j \leq l-2)$

［II］ $\alpha_i + \cdots + \alpha_l \qquad (1 \leq i \leq l-2)$

［III］ $\alpha_i + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_l \qquad (1 \leq i \leq l-2)$

［IV］ $\alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \qquad (1 \leq i < j \leq l)$

この4つの場合に分けて上の式の右辺を計算することにする．

［I］ の場合は，$r < i$ のときは分母と分子が等しくなるから無視してよい．さらに $i \leq r \leq j-1$ のときと $j \leq r \leq l-2$ のときとに分ければ次の式であることがわかる：

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{l-2}\frac{2l-i-j+1}{2l-i-j}\prod_{i<j\le r}\frac{2l-i-j+2}{2l-i-j}$$

第1項については次の式が成立する（$r<l-2$ として）：

$$\prod_{r=1}^{i}\prod_{j=r+1}^{l-2}\frac{2l-i-j+1}{2l-i-j}=\prod_{i=1}^{r}\frac{2l-r-i}{l-i+2}=\frac{(2l-r-1)\,!}{(2l-2r-1)\,!}\frac{(l-r+1)\,!}{(l+1)\,!}$$

第2項については次の式が成立する：

$$\prod_{r=1}^{i}\prod_{i<j\le r}\frac{2l-i-j+2}{2l-i-j}=\left(\prod_{i=1}^{r-2}\prod_{i<j\le r}\frac{2l-i-j+2}{2l-i-j}\right)\frac{2l-2r+3}{2l-2r+1}$$

この右辺の第1項には次の式が成立する：

$$\prod_{i=1}^{r-2}\prod_{i<j\le r}\frac{2l-i-j+2}{2l-i-j}=\prod_{i=1}^{r-2}\frac{(2l-2i+1)(2l-2i)}{(2l-i-r)(2l-i-r+1)}$$

$$=\frac{(2l-1)\,!}{(2l-2r+3)\,!}\frac{(2l-2r+1)\,!}{(2l-r-1)\,!}\frac{(2l-2r+2)\,!}{(2l-r)\,!}$$

全体として次の値を得る：

$$\frac{(2l-1)\,!\,(2l-2r)\,(l-r+1)\,!}{(2l-r)\,!\,(l+1)\,!}$$

［II］ の場合も $r<i$ の場合は無視してよい．したがって

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{l-i+2}{l-i+1}=\frac{l+1}{l-r+1}$$

［III］ の場合も $r<i$ は無視してよい．したがって

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{l-i+1}{l-i}=\frac{l}{l-r}$$

［IV］ の場合も $r<i$ は無視してよい．したがって

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{l}\frac{j-i+1}{j-i}=\prod_{i=1}^{r}\frac{l-i+1}{r-i+1}=\frac{l!}{(l-r)\,!\,r!}$$

以上を全部結合すれば求める次元 N は

$$N=\binom{2l}{r}$$

であることがわかる．ところでこれは V_r の次元に等しい．すなわち $W=V_r$ であることがわかる．すなわち $(\tilde{\rho},V_r)$ が λ_r を最高のウェイトとする基本的な既約表現になっている．

我々は $1\le r\le l-2$ を仮定したので，λ_{l-1} と λ_l の場合がまだ残っている．以下に Clifford 代数を用いて，λ_{l-1} と λ_l の場合の基本的既約表現を求めることにする．しかし実際には，一般論ですでにわかっているから，ここではその具体的な形のみをいうことに

する．

$\mathfrak{o}(2l, C)$ の2つのスピン表現を $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のスピン表現を利用して作ることにする．

$\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のスピン表現は

$$e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{ij}$$

の形の Clifford 代数を用いたから，ここで $\mathfrak{o}(2l, C)$ をやはりその形で表すことにする．すなわち

$$X \in \mathfrak{o}(2l, C) \iff {}^tX + X = 0$$

いま M_{ij} ($i<j$ で $i=2k-1$, $j=2k$ の形ではない)

$$M_{ij} = E_{i,j} - E_{j,i}$$

と定義すれば M_{ij} と次の H_i とが $\mathfrak{o}(2l, C)$ の生成元となっている．

$$H_i = E_{2i-1,2i} - E_{2i,2i-1}$$

$H_i (i=1, \cdots, l)$ が Cartan 部分代数の基底になっていることは前と同様にわかる．さらに次の交換関係が成立する：

$$[H_i, M_{2i-1,k}] = -M_{2i,k}, \qquad [H_i, M_{j,2i-1}] = -M_{j,2i}$$

$$[H_i, M_{2i,k}] = M_{2i-1,k}, \qquad [H_i, M_{j,2i}] = M_{j,2i-1}$$

したがって $\Lambda_i''(H)$ で H の $(2i-1, 2i)$ の成分を表すことにすれば $H \in \mathfrak{h}$ なる H について

$$H = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i''(H) H_i$$

が成立するから次の関係が成立する．以下 $i<j$ とする．

$$[H, M_{2i-1,2j-1}] = -\Lambda_i''(H) M_{2i,2j-1} - \Lambda_j''(H) M_{2i-1,2j}$$

$$[H, M_{2i-1,2j}] = -\Lambda_i''(H) M_{2i,2j} + \Lambda_j''(H) M_{2i-1,2j-1}$$

$$[H, M_{2i,2j-1}] = \Lambda_i''(H) M_{2i-1,2j-1} - \Lambda_j''(H) M_{2i,2j}$$

$$[H, M_{2i,2j}] = \Lambda_i''(H) M_{2i-1,2j} + \Lambda_j''(H) M_{2i,2j-1}$$

これから η, η' をそれぞれ ± 1 のいずれかとすれば

$$\alpha = i(\eta\Lambda_i'' + \eta'\Lambda_j'') \qquad (i<j)$$

とするとき X_α を

$$X_\alpha = M_{2i-1,2j-1} + i\eta M_{2i,2j-1} + i\eta' M_{2i-1,2j} - \eta\eta' M_{2i,2j}$$

とすれば

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$$

が得られる．これから $\mathfrak{o}(2l, C)$ のすべてのルートが次の $2(l^2-l)$ 個であることがわかる：

$$i(\eta\Lambda_i'' + \eta'\Lambda_j'') \qquad (1 \leq i < j \leq l)$$

したがって単純ルートとしては

$$\alpha_i = i(\Lambda_i'' - \Lambda_{i+1}'') \qquad (i < l)$$

$$\alpha_l = i(\Lambda_{l-1}'' + \Lambda_l'')$$

をとればよい．正のルートは $i(\Lambda_i'' - \Lambda_j'')$ と $i(\Lambda_i'' + \Lambda_j'')$ $(i<j)$ とになり，それは

$$i(\Lambda_i'' - \Lambda_j'') = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$$

$$i(\Lambda_i'' + \Lambda_j'') = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$$

などの ${}^tXF + FX = 0$ の形で得たものと全く同じものが得られる．したがって基本的ウェイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ は次の形となる：

$$\lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \cdots + \alpha_{l-2}) + \frac{1}{2}i(\alpha_{l-1} + \alpha_l) \qquad (i < l-1)$$

$$\lambda_{l-1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}l\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_l\right)$$

$$\lambda_l = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}l\alpha_l\right)$$

また X_i としては

$$X_i = M_{2i-1,2i+1} + iM_{2i,2i+1} - iM_{2i-1,2i+2} + M_{2i,2i+2}$$

をとればよいことがわかる．いま我々に必要な λ_{l-1} と λ_l を Λ'' を用いて表せば次の形となる：

$$\lambda_{l-1} = \frac{i}{2}(\Lambda_1'' + \cdots + \Lambda_{l-1}'' - \Lambda_l'')$$

$$\lambda_l \ = \frac{i}{2}(\Lambda_1'' + \cdots + \Lambda_{l-1}'' + \Lambda_l'')$$

さて §17 でのべた $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のスピン表現を考える．ここでも，もちろん M_{ij} を $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ で同じように定義して，Γ_i を定義した上でスピン表現 ρ は

$$\rho(M_{ij}) = \frac{1}{4i}[\gamma_i, \gamma_j]$$

となっている．

ところで $\mathfrak{o}(2l, C) \subseteq \mathfrak{o}(2l+1, C)$ であるから，M_{ij} $(i < j \leq 2l)$ を考えればこれがちょうど $\mathfrak{o}(2l, C)$ の基底になっている．したがって $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のスピン表現 ρ は $\mathfrak{o}(2l,$

C) の1つの表現を与えることになっている．これを同じ ρ で表すことにする．ρ は $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ の既約表現であるが，$\mathfrak{o}(2l, C)$ の既約表現ではない．実は ρ は λ_{l-1} に対応する既約表現 ρ_{l-1} と λ_l に対応する既約表現 ρ_l の直積になっている．これをみるために $\mathfrak{o}(2l+1, C)$ のスピン表現に戻って考えることにする．

いま計算から明らかに γ_{2l+1} が $\mathfrak{o}(2l, C)$ の M_{ij}（すなわち $1 \leq i < j \leq 2l$）のすべてと交換可能であることがわかる（厳密にいえば $\rho(M_{ij})$ と交換可能）．したがって P_+ と P_- とを次のように定義すれば

$$P_+ = \frac{1}{2}(1+\gamma_{2l+1}), \qquad P_- = \frac{1}{2}(1-\gamma_{2l+1})$$

P_+ と P_- とは共にすべての $\mathfrak{o}(2l, C)$ の元と交換可能となり，さらに次の条件をみたす：

$$P_+{}^2 = P_+, \qquad P_-{}^2 = P_-, \qquad P_+ + P_- = I$$

ここに I は恒等写像とする．

したがって $\mathrm{End}(V)$ の全体（この場合は $M(2^l, C)$ と同型である）は P_+ の像 $\mathfrak{P}_+$ と P_-の像 $\mathfrak{P}_-$ との直積となっており，ρ は P_+ の上の表現 ρ_+ と P_- の上の表現 ρ_- の直積となっている．前に展開した一般論から ρ_+ が λ_l のスピン表現であり，ρ_- が λ_{l-1} のスピン表現であることは明らかである．

§ 20. $\mathfrak{sp}(2l, C)$

$\mathfrak{sp}(2l, C)$ についてのべる前にまず $Sp(2l, C)$ についてのべることにする．

まず F を次の式で定義する：

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{pmatrix}$$

$u, v \in C^{2l}$ として非退化反対称双一次形式 B を

$$\begin{aligned} B(u, v) &= {}^t u F v \\ &= u_1 v_{l+1} + \cdots + u_l v_{2l} - u_{l+1} v_1 - \cdots - u_{2l} v_l \end{aligned}$$

によって定義する．ここに u_i, v_i はそれぞれ u, v の i 成分とする．

いま $Sp(2l, C)$ をすべての $u, v \in C^{2l}$ について次の条件をみたす $A \in M(2l, C)$ の全体と定義する：

$$B(Au, Av) = B(u, v)$$

この定義から $Sp(2l, C)$ が群をなしていることは明らかであろう．いま上の条件をかき

直せば

$$ {}^t u {}^t A F A v = {}^t u F v $$

であるから，この条件は

$$ {}^t A F A = F $$

と同等なことが直ちにわかる．さらにこの条件から $Sp(2l, \boldsymbol{C})$ が $M(2l, \boldsymbol{C})$ の閉集合，したがって $Sp(2l, \boldsymbol{C})$ が線形リー群であることがわかる．

$Sp(2l, \boldsymbol{C})$ は complex symplectic group of degree $2l$ ($2l$ 次複素斜交群) と呼ばれる．$Sp(2l, \boldsymbol{C})$ のリー代数を $\mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C})$ とかく．

いま $X \in M(2l, \boldsymbol{C})$ として $X \in \mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C})$ である条件を求めれば

$$ X \in \mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C}) \iff \text{すべての } t \in \boldsymbol{R} \text{ について } {}^t\exp(tX) F \exp(tX) = F $$

$$ \iff \text{すべての } t \in \boldsymbol{R} \text{ について } \exp(t {}^t X) F \exp(tX) = F $$

いま $\exp(t {}^t X) F \exp(tX) = F$ を t で微分して $t = 0$ とおけば次の式が得られる：

$$ {}^t X F + F X = 0 $$

逆に ${}^t X F + F X = 0$ とすれば ${}^t X = -F X F^{-1}$ したがって $\exp(t {}^t X) F \exp(tX) F^{-1} = E$ がすべての $t \in \boldsymbol{R}$ について成立するから $X \in \mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C})$ であることがわかった．

いま X の具体的な形を知るために

$$ X = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} \qquad (M, N, P, Q \in M(l, \boldsymbol{C})) $$

とおけば ${}^t N = N$, ${}^t P = P$, ${}^t M = -Q$ が，X が $\mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C})$ の元になる条件となっている．これから $\mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C})$ の基底として次のものをとればよいことが分る：

$$ \begin{array}{ll} E_{ii} - E_{l+i,l+i} & (1 \leq i \leq l) \\ E_{ij} - E_{l+j,l+i} & (1 \leq i \neq j \leq l) \\ E_{i,l+i} & (1 \leq i \leq l) \\ E_{i,l+j} + E_{j,l+i} & (1 \leq i < j \leq l) \\ E_{l+i,j} + E_{l+j,i} & (1 \leq i < j \leq l) \end{array} $$

これから $\mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C})$ の次元が $2l^2 + l$ であることがわかる．この基底を用いて $\mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C})$ の Killing 形式を前と同じように計算すれば次のものであることが分る：

$$ \kappa(X, Y) = (2l + 2) \operatorname{Tr}(XY) $$

この Killing 形式が非退化であることは演習問題とする．

$\mathfrak{sp}(2l, \boldsymbol{C})$ の元で対角線以外は 0 となっているものの全体を $\mathfrak{h}$ とかくことにする．明ら

かに $\mathfrak{h}$ の基底は

$$E_{ii} - E_{l+i,\,l+i} \qquad (1 \leq i \leq l)$$

である．§17 と同じように $\mathfrak{h}$ が Cartan 部分代数であることが分る．

いま前と同じく $\mathfrak{h}$ の元 H に対してその対角線の i 番目の元を H に対応させる関数を $\Lambda_i(H)$ とおけば，すべての $\mathfrak{h}$ の元 H に対して次の関係式が成立する．

$$H = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i(H)(E_{ii} - E_{l+i,\,l+i})$$

$\mathfrak{o}(n, C)$ の場合と同じく $\mathfrak{sp}(2l, C)$ の 0 でないルートの全体 Φ が次の $2l^2$ のものであることがわかる：

$$\Phi = \{\pm 2\Lambda_i \mid 1 \leq i \leq l\} \cup \{\pm(\Lambda_i + \Lambda_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$
$$\cup \{\pm(\Lambda_i - \Lambda_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

いま $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ を次の式で定義する：

$$\alpha_i = \Lambda_i - \Lambda_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq l-1)$$
$$\alpha_l = 2\Lambda_l$$

このとき

$$2\Lambda_i = 2\alpha_i + 2\alpha_{i+1} + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l \qquad (1 \leq i \leq l-1)$$
$$\Lambda_i + \Lambda_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$$
$$(1 \leq i < j \leq l-1)$$
$$\Lambda_i + \Lambda_l = \alpha_i + \cdots + \alpha_{l-1} + \alpha_l \qquad (1 \leq i \leq l-1)$$
$$\Lambda_i - \Lambda_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1} \qquad (1 \leq i < j \leq l)$$

が成立するから，$\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ が Φ の基本系であることがわかる．

これから §17 と同じように計算すれば

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \qquad (|i-j| \geq 2,\ 1 \leq i, j \leq l-1 \text{ のとき})$$
$$(\alpha_i, \alpha_j) = -\frac{1}{4(l+1)} \qquad (|i-j| = 1,\ 1 \leq i, j \leq l-1 \text{ のとき})$$
$$(\alpha_{l-1}, \alpha_l) = -\frac{1}{2(l+1)}$$
$$(\alpha_i, \alpha_i) = \frac{1}{2(l+1)} \qquad (i = 1, \cdots, l-1 \text{ のとき})$$
$$(\alpha_l, \alpha_l) = \frac{1}{l+1}$$

となる．これから $\mathfrak{sp}(2l, C)$ の Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & -1 & 0 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

であり，$\mathfrak{sp}(2l, C)$ が C_l 型であることがわかる．$C_2 = B_2$ であるから，以下 $l \geq 3$ とする．

$\mathfrak{sp}(2l, C)$ の Weyl 群 $\mathcal{W}$ は B_l の Weyl 群と全く平行に議論が行われ，$\mathcal{W}$ は B_l のときと同じく $\mathfrak{S}_l$ と $(Z/2Z)^l$ の半直積になっていることがわかる．

$\mathfrak{o}(n, C)$ の場合と同じく $H_1, \cdots, H_l$ を計算すれば

$$H_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1} - E_{l+i, l+i} + E_{l+i+1, l+i+1} \qquad (1 \leq i \leq l-1)$$

$$H_l = E_{ll} - E_{2l, 2l}$$

であり，$\mathfrak{sp}(2l, C)$ の基本的な整ウェイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ を計算すれば次の式を得る：

$$\lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i\left(\alpha_i + \cdots + \alpha_{l-1} + \frac{1}{2}\alpha_l\right)$$

次に $\mathfrak{sp}(2l, C)$ の Cartan 分解の様子を調べることにする．$1 \leq i \leq l-1$ とすれば $\alpha_i = \Lambda_i - \Lambda_{i+1}$ であるから L_{α_i} の生成元として次の X_i をとればよいことがわかる：

$$X_i = E_{i, i+1} - E_{l+i+1, l+i}$$

ここで H_i の形を考えれば $Y = Y_{\alpha_i}$ としては

$$Y_i = E_{i+1, i} - E_{l+i, l+i+1}$$

をとればよいことがわかる．

さて $i = l$ の場合は $\alpha_l = 2\Lambda_l$ であるから X_l としては次のものをとればよい．

$$X_l = E_{l, 2l}$$

ここで $H_l = E_{ll} - E_{2l, 2l}$ であるから Y_l は

$$Y_l = E_{2l, l}$$

ととればよいことがわかる．

次に基本的整ウェイト λ_r に対する既約表現は，C^{2l} を V として $\mathfrak{sp}(2l,C)$ の恒等表現を (ρ,V) とする．$\mathfrak{o}(n,C)$ の場合と同じく V_r を r 個のテンソル積 $V\otimes\cdots\otimes V$ のなかの階数 r の交代テンソルの全体として $\tilde{\rho}=\rho\otimes\cdots\otimes\rho$ とすれば $(\tilde{\rho},V_r)$ が求めるものであることは，$\mathfrak{o}(n,C)$ の場合と平行にしかもやや簡単に証明することができる．

§ 21. 例外リー代数

残念ながら本書では例外リー代数を詳しくのべている暇がない．大統一理論では E_6 は有力候補の一つであるし，重力を入れた super symmetry ではすべての例外リー代数が活躍する可能性があるといわれている．詳しくはあとがきの文献によることにして，ここでは最小程度の解説を Freudenthal の方法によってする．

いま L を線形複素リー代数 (ρ,V) をその表現とする．このとき共役表現 ρ^* を前より一般の形で定義することを考える．V の線形汎関数の全体を V^* で表す．前には V^* の元は f のような形で表したがここでは v^* で表すことにする．V の任意の元 v と V^* の任意の元 v^* とが与えられたとき $v^*(v)$ は複素数を表すがこれを $v^*\cdot v$ または $v\cdot v^*$ によって表すことにする．

いま ρ の共役表現 (ρ^*,V^*) を定義する．L の元 X と V^* の元 v^* とが与えられたとき $\rho^*(X)v^*$ が再び V^* の元になるように定義すればよい．このためには V の任意の元 v をとったときに $(\rho^*(X)v^*)(v)$ を定義すればよい．これを次のように定義する：

$$(\rho^*(X)v^*)(v)=-v^*(\rho(X)v)$$

この定義が前にのべた共役表現の定義と同じであることを証明するために V の基底 $e_1,\cdots,e_n$ を固定する．このとき V から V^* への同型写像 j を

$$j(a_1e_1+\cdots+a_ne_n)(b_1e_1+\cdots+b_ne_n)=\sum_i a_ib_i$$

によって定義する．別ないい方をすれば，$u,v\in V$ とするとき

$$j(u)(v)={}^tu\cdot v$$

によって j を定義するのである．

いま $u=\sum_i a_ie_i$，$v^*=j(u)$，$v=\sum_i b_ie_i$，$\rho(X)$ を $e_1,\cdots,e_n$ を用いて行列の形に表したものを $A=(c_{ij})$，$\rho^*(X)v^*=j(\sum_i d_ie_i)$ とおけば

$$\sum_i d_ib_i=(\rho^*(X)v^*)(v)=-v^*(\rho(X)v)$$

$$= -\sum_{i,j} a_i c_{ij} b_j = -\sum_{i,j} c_{ji} a_j b_i$$

これから

$$d_i = -\sum_j c_{ji} a_j = (-{}^tAu \text{ の } i \text{ 成分})$$

がわかって前の定義 $-{}^t\rho(X)$ といまの定義が同じであることがわかる．

いまこの L, ρ, ρ^*, V, V^* について次の条件をみたす4つの関数 $\langle\ \rangle$, $\langle\ \rangle^*$, $\times$, $\times^*$ が与えられていたとする．

［1］ $\langle\ \rangle$ は $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対して複素数 $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ を与える反対称ですべての変数について線形である．$\langle\ \rangle^*$ は $v_1^*, v_2^*, v_3^* \in V^*$ に対して複素数 $\langle v_1^*, v_2^*, v_3^*\rangle^*$ を与える反対称ですべての変数について線形である．しかも次の条件が任意の $X \in L$ についてみたされている：

$$\langle\rho(X)v_1, v_2, v_3\rangle + \langle v_1, \rho(X)v_2, v_3\rangle + \langle v_1, v_2, \rho(X)v_3\rangle = 0$$

$$\langle\rho^*(X)v_1^*, v_2^*, v_3^*\rangle^* + \langle v_1^*, \rho^*(X)v_2^*, v_3^*\rangle^* + \langle v_1^*, v_2^*, \rho^*(X)v_3^*\rangle^* = 0$$

［2］ $\times$ と $\times^*$ は反対称で2つの変数について対称な次の形の写像である：

$$\times\ :\quad V \times V \longrightarrow V^*$$

$$\times^*:\quad V^* \times V^* \longrightarrow V$$

この $\times, \times^*$ は次の関係をみたす（またはそれによって定義される）

$$(v_1 \times v_2)(v_3) = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$$

$$v_3^*(v_1^* \times v_2^*) = \langle v_1^*, v_2^*, v_3^*\rangle$$

そのうえ次の等式がみたされているものとする．以下 $\times^*$ を単に $\times$ で表すことにする．

$$(v_1 \times v_2)(v_1^* \times v_2^*) = \kappa(v_1^* \circ v_2, v_2^* \circ v_1) - \kappa(v_2^* \circ v_2, v_1^* \circ v_1)$$

ここに $v^* \circ v$ は次の条件をみたす $X \in L$ と定義する．

$$v^*(\rho(Y)v) = \kappa(Y, X) = \kappa(X, Y)$$

ここに κ はもちろん Killing 形式である．

いまこの条件がみたされているとして $L \oplus V \oplus V^*$ をリー代数にするような交換子積 $[\ ,\ ]$ を定義することにする．いま a, b を L, V, V^* のいずれかの元として $[a, b]$ を $[a, b] = -[b, a]$ と Jacobi の等式が成立するようにすればよい．まず $X, Y \in L$ のときは $[X, Y]$ は L の交換子積として定義する．それ以外は次のように定義する：

$$[X, v] = -[v, X] = \rho(X)v, \qquad [X, v^*] = -[v^*, X] = \rho^*(X)v^*$$

$$[v_1, v_2] = v_1 \times v_2, \qquad [v_1^*, v_2^*] = v_1^* \times v_2^*$$

$$[v, v^*] = -[v^*, v] = -v^* \circ v$$

まず a, b, c のなかの2つが L の元のときは

$$\begin{aligned}&[[v, X], Y] + [[X, Y], v] + [[Y, v], X]\\&\quad = -[\rho(X)v, Y] + \rho([X, Y])v + [\rho(Y)v, X]\\&\quad = \rho(Y)\rho(X)v + \rho([X, Y])v - \rho(X)\rho(Y)v = 0\end{aligned}$$

v を v^* にかえれば ρ が ρ^* に代るだけでやはり0になることがわかる.

いま $a \in V$, $b \in V^*, c \in L$ の場合は次の形を Y とおいて $Y=0$ をいえばよい.

$$\begin{aligned}Y &= [[v, v^*], X] + [[v^*, X], v] + [[X, v], v^*]\\&= -[v^* \circ v, X] - [\rho^*(X)v^*, v] + [\rho(X)v, v^*]\\&= -[v^* \circ v, X] - (\rho^*(X)v^*) \circ v - v^* \circ \rho(X)v\end{aligned}$$

このためには $Z \in L$ を任意にとって $\kappa(Y, Z) = 0$ をいえばよい.

$$\begin{aligned}\kappa(Y, Z) &= -\kappa([v^* \circ v, X], Z) - \kappa((\rho^*(X)v^*) \circ v, Z)\\&\qquad - \kappa(v^* \circ \rho(X)v, Z)\\&= -\kappa(v^* \circ v, [X, Z]) - (\rho^*(X)v^*)(\rho(Z)v) - v^*(\rho(Z)\rho(X)v)\\&= -v^*(\rho([X, Z])v) + v^*(\rho(X)\rho(Z)v) - v^*(\rho(Z)\rho(X)v)\\&= 0\end{aligned}$$

次に $a = v_1$, $b = v_2$, $c = v_3$ のときは

$$\begin{aligned}X &= [[v_1, v_2], v_3] + [[v_2, v_3], v_1] + [[v_3, v_1], v_2]\\&= [v_1 \times v_2, v_3] + [v_2 \times v_3, v_1] + [v_3 \times v_1, v_2]\\&= (v_1 \times v_2) \circ v_3 + (v_2 \times v_3) \circ v_1 + (v_3 \times v_1) \circ v_2\end{aligned}$$

とおいて，すべての $Y \in L$ について $\kappa(X, Y) = 0$ をいえばよい. ところでこれは次のように証明される：

$$\begin{aligned}\kappa(X, Y) &= \kappa((v_1 \times v_2) \circ v_3, Y) + \kappa((v_2 \times v_3) \circ v_1, Y) + \kappa((v_3 \times v_1) \circ v_2, Y)\\&= (v_1 \times v_2)(\rho(Y)v_3) + (v_2 \times v_3)(\rho(Y)v_1) + (v_3 \times v_1)(\rho(Y)v_2)\\&= \langle v_1, v_2, \rho(Y)v_3\rangle + \langle v_2, v_3, \rho(Y)v_1\rangle + \langle v_3, v_1, \rho(Y)v_2\rangle\\&= 0\end{aligned}$$

$a = v_1^*$, $b = v_2^*$, $c = v_3^*$ のときも同様である.

$a = v_1$, $b = v_2$, $c = v^*$ のときは v を次のようにおいて，任意の u^* について $u^*(v) = 0$ をいえばよい.

$$v = [[v_1, v_2], v^*] + [[v_2, v^*], v_1] + [[v^*, v_1], v_2]$$

$$= [v_1 \times v_2, v^*] - [v^* \circ v_2, v_1] + [v^* \circ v_1, v_2]$$
$$= (v_1 \times v_2) \times v^* - \rho(v^* \circ v_2)v_1 + \rho(v^* \circ v_1)v_2$$
$$u^*(v) = u^*((v_1 \times v_2) \times v^*) - u^*(\rho(v^* \circ v_2)v_1) + u^*((\rho(v^* \circ v_1)v_2)$$
$$= \langle v_1 \times v_2, v^*, u^* \rangle - \kappa(v^* \circ v_2, u^* \circ v_1) + \kappa(v^* \circ v_1, u^* \circ v_2)$$
$$= (v_1 \times v_2)(v^* \times u^*) - \kappa((v^* \circ v_2), (u^* \circ v_1)) + \kappa((v^* \circ v_1), (u^* \circ v_2))$$
$$= 0$$

最後に $a = v_1^*$, $b = v_2^*$, $c = v$ とすれば，v^* を次のようにおいて任意の $u \in V$ について $v^*(u) = 0$ をいえばよい．

$$v^* = [[v_1^*, v_2^*], v] + [[v_2^*, v], v_1^*] + [[v, v_1^*], v_2^*]$$
$$= [v_1^* \times v_2^*, v] + [v_2^* \circ v, v_1^*] - [v_1^* \circ v, v_2^*]$$
$$= (v_1^* \times v_2^*) \times v + \rho^*(v_2^* \circ v)v_1^* - \rho^*(v_1^* \circ v)v_2^*$$
$$v^*(u) = ((v_1^* \times v_2^*) \times v)(u) + (\rho^*(v_2^* \circ v)v_1^*)(u) - (\rho^*(v_1^* \circ v)v_2^*)(u)$$
$$= \langle v_1^* \times v_2^*, v, u \rangle - v_1^*(\rho(v_2^* \circ v)u) + v_2^*(\rho(v_1^* \circ v)u)$$
$$= (v \times u)(v_1^* \times v_2^*) - \kappa(v_2^* \circ v, v_1^* \circ u) + \kappa(v_1^* \circ v, v_2^* \circ u)$$
$$= 0$$

これで $L \oplus V \oplus V^*$ がリー代数になることがわかった．

さて G_2 型の例外リー代数を作ることにする．上の方法で $L = \mathfrak{sl}(3, C)$ として $V = C^3$ とする．V の基底を e^1, e^2, e^3 として V^* の対応する基底を e_1^*, e_2^*, e_3^* とする．V の元 v は $\sum_i v_i e^i$ とかかれ，V^* の元 v^* は $\sum_i v^i e_i^*$ となる．いま ρ は恒等表現とする．すなわち $\rho(X)v$ は Xv であり $\rho^*(X)v^*$ は v^1, v^2, v^3 を成分とするベクトルに $-{}^tX$ を掛けたものになっている．

まず $\langle u, v, w \rangle$ を，外積を用いて

$$\langle u, v, w \rangle = u \wedge v \wedge w = \sum_{i,j,k} \varepsilon^{ijk} u_i v_j w_k$$

と定義する．ここに $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ は i, j, k が 1, 2, 3 の偶置換ならば 1，奇置換ならば -1，その他の場合は 0 と定義する．

いま $X \in L$ として $A = \exp(tX)$ とすれば $\det A = 1$ であるから

$$\langle Au, Av, Aw \rangle = Au \wedge Av \wedge Aw = \det A\, u \wedge v \wedge w$$
$$= u \wedge v \wedge w = \langle u, v, w \rangle$$

となる．これを微分すれば

$$\langle Xu, v, w\rangle + \langle u, Xv, w\rangle + \langle u, v, Xw\rangle = 0$$

と $\langle u, v, w\rangle$ が必要な条件をみたしていることがわかる．同様にして $\langle u^*, v^*, w^*\rangle^*$ を次の式で定義すれば $\langle u^*, v^*, w^*\rangle^*$ も必要な条件をみたしていることがわかる：

$$\langle u^*, v^*, w^*\rangle^* = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} u^i v^j w^k$$

$X, Y \in L$ としたとき Killing 型式 $\kappa(X, Y)$ は $6\mathrm{Tr}(AB)$ であるから $v^* \circ v$ の定義の式

$$v^*(Xv) = \kappa(X, v^* \circ v)$$

は X の (i,j) 成分を X_{ij}, $v^* \circ v$ の (i,j) 成分を $(v^* \circ v)_{ij}$ とするとき

$$\sum_{i,j} v^i X_{ij} v_j = 6 \sum_{i,j} X_{ij} (v^* \circ v)_{ji}$$

を意味するから $i \neq j$ のときは

$$(v^* \circ v)_{ij} = \frac{1}{6} v^j v_i$$

であることがわかる．

$i = j$ のときは上の式は

$$\sum_i X_{ii} v^i v_i = 6 \sum_i X_{ii} (v^* \circ v)_{ii}$$

を意味するだけである．$X = E_{ii} - E_{i+1, i+1}$ とおけば

$$v^i v_i - 6(v^* \circ v)_{ii} = v^{i+1} v_{i+1} - 6(v^* \circ v)_{i+1, i+1}$$

となるから，すべての i について

$$(v^* \circ v)_{ii} = \frac{1}{6}(v^i v_i - c)$$

となる定数 c が存在する． $v^* \circ v$ は L の元であるから $\sum_i (v^* \circ v)_{ii} = 0$，したがって

$$\sum_i (v^i v_i - c) = 0$$

これから　$c = \frac{1}{3} \sum_i v^i v_i = \frac{1}{3} v^*(v)$　がでて

$$(v^* \circ v)_{ij} = \frac{1}{6}\left(v^j v_i - \frac{1}{3}\delta_{ij} v^*(v)\right)$$

がでる．これから次のことがわかる：

$$\begin{aligned}\kappa(u^* \circ u, v^* \circ v) &= \frac{1}{6} \sum_{i,j} \left(u^j u_i - \frac{1}{3}\delta_{ij} u^*(u)\right)\left(v^i v_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} v^*(v)\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} \sum_{i,j} u^j u_i v^i v_j - \frac{1}{3} u^*(u) v^*(v) - \frac{1}{3} u^*(u) v^*(v) + \frac{1}{3} u^*(u) v^*(v)\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}\Big(v^*(u)u^*(v) - \frac{1}{3}u^*(u)v^*(v)\Big)$$

したがって

$$\begin{aligned}\kappa(u^* \circ v, v^* \circ u) &- \kappa(v^* \circ v, u^* \circ u)\\ &= \frac{1}{6}\Big(v^*(v)u^*(u) - \frac{1}{3}u^*(v)v^*(u)\Big) - \frac{1}{6}\Big(u^*(v)v^*(u) - \frac{1}{3}v^*(v)u^*(u)\Big)\\ &= \frac{2}{9}(u^*(u)v^*(v) - u^*(v)v^*(u))\end{aligned}$$

$$(u \times v)(w) = \sum_{i,j,k} \varepsilon^{ijk} u_i v_j w_k$$

であるから $u \times v$ の k 成分 $(u \times v)^k$ は次のものである：

$$(u \times v)^k = \sum_{i,j} \varepsilon^{ijk} u_i v_j$$

同様にして $(u^* \times v^*)$ の k 成分 $(u^* \times v^*)_k$ は次のものであることが分る：

$$(u^* \times v^*)_k = \frac{2}{9} \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} u^i v^j$$

これから次の式がでてくる：

$$(u \times v)\ (u^* \times v^*) = \frac{2}{9} \sum_{i,j,k} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{i'j'k} u_i v_j u^{i} v^{j}$$

ところで $\sum_k \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{i'j'k}$ は $i = i'$, $j = j'$ のときは1で $i = j'$, $j = i'$ のときは -1 であるから結果として

$$(u \times v)(u^* \times v^*) = \frac{2}{9} \sum_{i \neq j} (u_i v_j u^i v^j - u_i v_j u^j v^i)$$

ところで右辺のカッコのなかで $i = j$ とおけば0であるから，結果として

$$\begin{aligned}(u \times v)(u^* \times v^*) &= \frac{2}{9} \sum_{i,j} (u_i v_j u^i v^j - u_i v_j u^j v^i)\\ &= \frac{2}{9}(u^*(u)v^*(v) - v^*(u)u^*(v))\end{aligned}$$

したがって

$$(u \times v)(u^* \times v^*) = \kappa(u^* \circ v, v^* \circ u) - \kappa(u^* \circ u, v^* \circ v)$$

と目的の式が得られた.

これから次の必要な式が証明された：

$$(u \times v)(u^* \times v^*) = \kappa(u^* \circ u, v^* \circ v) - \kappa(v^* \circ u, u^* \circ v)$$

以上によって目的とするリー代数が定義されたが，いま L の Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とする. $\mathfrak{h}$ は $H_1 = E_{11} - E_{22}$, $H_2 = E_{22} - E_{33}$ から生成されそのルートは $\pm(\Lambda_i - \Lambda_j)$

$(1 \le i < j \le 3)$ である．簡単な計算によって次のことがわかる：

$$
\begin{aligned}
&[H_1, e^1] = e^1 = \Lambda_1(H_1)e^1, && [H_1, e_1^*] = -e_1^* = -\Lambda_1(H_1)e_1^* \\
&[H_1, e^2] = -e^2 = \Lambda_2(H_1)e^2, && [H_1, e_2^*] = e_2^* = -\Lambda_2(H_2)e_2^* \\
&[H_1, e^3] = 0 = \pm\Lambda_3(H_1)e^3, && [H_1, e_3^*] = 0 = \pm\Lambda_3(H_1)e_3^* \\
&[H_2, e^1] = 0 = \pm\Lambda_1(H_2)e^1, && [H_2, e_1^*] = 0 = \pm\Lambda_1(H_2)e_1^* \\
&[H_2, e^2] = e^2 = \Lambda_2(H_2)e^2, && [H_2, e_2^*] = -e_2^* = -\Lambda_2(H_2)e_2^* \\
&[H_2, e^3] = -e^3 = \Lambda_3(H_2)e^3, && [H_2, e_3^*] = e_3^* = \Lambda_3(H_2)e_3^*
\end{aligned}
$$

これから $\mathfrak{h}$ が $L \oplus V \oplus V^*$ の Cartan 部分代数であり，そのルートの全体が $\pm\Lambda_i (1 \le i \le 3)$，$\pm(\Lambda_i - \Lambda_j)$ $(1 \le i < j \le 3)$ であることがわかる．$\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = 0$ を用いれば単純ルートとしてはたとえば $\Lambda_1 - \Lambda_2$ と Λ_2 とをとればよいことがわかる．これから計算を続ければこのリー代数が G_2 型の例外リー代数であることがわかる．G_2 の次元は $8 + 3 + 3 = 14$ であるから 14 次元である．

同じ方法で E_8 型例外リー代数を作ることにする．今度は $L = \mathfrak{sl}(9, C)$ をとる．V を v_{ijk} と3つの下の添字をもった交代テンソルとする．1つの添字が9次元すなわち C^9 を動くものとする．したがって V の次元は

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

である．同様に V^* を v^{ijk} と3つの上の添字をもった交代テンソルで1つの添字が9次元の複素線形空間 C^9 を表すものとする．したがって V^* の次元はやはり 84 であり全体の空間 $L \oplus V \oplus V^*$ の次元は $80 + 84 + 84 = 248$ となる．

さて $u, v, w \in V$ とするとき反対称線形の $\langle u, v, w \rangle$ を次の式によって定義する：

$$\langle u, v, w \rangle = \sum \varepsilon^{ijklmnopq} u_{ijk} v_{lmn} w_{opq}$$

ここに $\varepsilon^{ijklmnopq} = \varepsilon_{ijklmnopq}$ は $ijklmnopq$ が 123456789 の偶置換のときは 1，奇置換のときは -1，それ以外のときは 0 と定義する．

同様に $u^*, v^*, w^* \in V^*$ のときに $\langle u^*, v^*, w^* \rangle$ を次の式で定義する：

$$\langle u^*, v^*, w^* \rangle = (2 \cdot 6 \cdot 9)^{-1} \sum \varepsilon_{ijklmnopq} u^{ijk} v^{lmn} w^{opq}$$

いま $X \in \mathfrak{sl}(9, C)$ としたときに $(Xv)_{ijk}$ を次の式によって定義する：

$$(Xv)_{ijk} = \sum_l (X_{il} v_{ljk} + X_{jl} v_{ilk} + X_{kl} v_{ijl})$$

これから G_2 の場合と同じように

$$\langle Xv_1, v_2, v_3\rangle + \langle v_1, Xv_2, v_3\rangle + \langle v_1, v_2, Xv_3\rangle = 0$$

がでてくる．明らかに Xv^* は次の式で定義されて

$$(Xv^*)^{ijk} = -\sum_l (X_{li}v^{ljk} + X_{lj}v^{ilk} + X_{lk}v^{ijl})$$

これから次の式がでてくる：

$$\langle Xv_1{}^*, v_2{}^*, v_3{}^*\rangle + \langle v_1{}^*, Xv_2{}^*, v_3{}^*\rangle + \langle v_1{}^*, v_2{}^*, Xv_3{}^*\rangle = 0$$

さらに $X, Y \in L$ とするとき $\kappa(X, Y) = 18\,\mathrm{Tr}(XY)$ であるから $\kappa(X, v^* \circ v) = v^*(Xv)$ から $v^* \circ v$ を計算すれば，$v^* \circ v$ の (i, j) 成分を $(v^* \circ v)_{ij}$ とかいて次の式が得られる：

$$18\sum_{i,j} X_{ij}(v^* \circ v)_{ji} = \sum_{i,j,k,l} v^{ijk}(X_{il}v_{ljk} + X_{jl}v_{ilk} + X_{kl}v_{ijl})$$

$$= \sum_{i,j,k,l} X_{ij}(v^{ilk}v_{jlk} + v^{lik}v_{ljk} + v^{kli}v_{klj})$$

したがって $i \neq j$ とすれば次の式が得られる：

$$(v^* \circ v)_{ij} = \frac{1}{18}\sum_{l,k}(v^{jlk}v_{ilk} + v^{ljk}v_{lik} + v^{klj}v_{kli})$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{l,k} v^{jlk}v_{ilk}$$

前と同じ計算をすれば一般には次の式が得られる：

$$(v^* \circ v)_{ij} = \frac{1}{6}\Big(\sum_{l,k} v^{jlk}v_{ilk} - \frac{1}{9}\delta_{ij}v^*(v)\Big)$$

これから次の式が得られる：

$$\kappa(u^* \circ u, v^* \circ v) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{i,j,l,k\\ l',k'}} u^{jlk}u_{ilk}v^{il'k'}v_{jl'k'} - \frac{1}{9}u^*(u)v^*(v)\Big)$$

したがって次の形が得られる：

$$\begin{aligned}&\kappa(u^* \circ u, v^* \circ v) - \kappa(v^* \circ u, u^* \circ v)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{i,j,l,k\\ l',k'}} u^{jlk}u_{ilk}v^{il'k'}v_{jl'k'} - \frac{1}{9}u^*(u)v^*(v)\Big)\\ &\quad - \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{i,j,l,k\\ l',k'}} u^{jlk}v_{ilk}v^{il'k'}v_{jl'k'} - \frac{1}{9}u^*(v)v^*(u)\Big)\end{aligned}$$

さて $(u \times v)(u^* \times v^*)$ を計算すれば次の形となる：

$$(u \times v)(u^* \times v^*) = 6\cdot(2\cdot 6\cdot 9)^{-1}\sum \varepsilon^{ijklmn}{}_{i'j'k'l'm'n'}u_{ijk}v_{lmn}u^{i'j'k'}v^{l'm'n'}$$

ここに $\varepsilon^{ijklmn}{}_{i'j'k'l'm'n'}$ は $i'j'k'l'm'n'$ が $ijklmn$ の偶置換ならば 1，奇置換ならば -1，その他のときは 0 である．

いま $u_{ijk}v_{lmn}$ を1つ選ぶ．このとき $ijklmn$ を (i',j',k') と (l',m',n') の2組に分ける仕方は

(i,j,k) が (i',j',k') となる

(i,j,k) のうち2つが (i',j',k') にある

(i,j,k) のうち1つが (i',j',k') にある

(i,j,k) が (l',m',n') になる

と4通りになる．

$\{i,j,k\}$ と $\{l,m,n\}$ との間に共通の要素があるものは以下の計算で0となる．したがって

$$(u\times v)(u^*\times v^*)=6\cdot(2\cdot 6\cdot 9)^{-1}(9\sum_{\substack{i,j,l,k\\ l',k'}}u^{jlk}u_{ilk}v^{il'k'}v_{j'l'k'}-9\sum_{\substack{i,j,l,k\\ l',k'}}u^{jlk}v_{ilk}v^{il'k'}u_{jl'k'}$$

$$+u^*(v)v^*(u)-u^*(u)v^*(v)$$

$$=\kappa(u^*\circ u,v^*\circ v)-\kappa(v^*\circ u,u^*\circ v)$$

となって求める式が得られた．

さて前と同じく L の Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とする．L のルートは $\pm(\Lambda_i-\Lambda_j)$ $(i<j)$ である．いま $1\leq l<m<n\leq 9$ として V の元 $u^{(l,m,n)}$ を次のものと定義する．ここに $u_{ijk}{}^{(l,m,n)}$ は $u^{(l,m,n)}$ の (i,j,k) 成分である：

$$u_{i,j,k}{}^{(l,m,n)}=\varepsilon_{ijk}{}^{lmn}$$

ここに $\varepsilon_{ijk}{}^{lmn}$ は $\begin{pmatrix} l & m & n\\ i & j & k\end{pmatrix}$ が偶置換ならば 1，奇置換ならば -1，その他のときは0と定義する．このとき明らかに次の式が成立する：

$$[H,u^{(l,m,n)}]=(\Lambda_l(H)+\Lambda_m(H)+\Lambda_n(H))u^{(l,m,n)}$$

これから $\Lambda_l+\Lambda_m+\Lambda_n$ が $L\oplus V\oplus V^*$ のルートであることがわかる．同様のことを V^* について行えば $-(\Lambda_l+\Lambda_m+\Lambda_n)$ がルートであることがわかり，すべてのルートが $\pm(\Lambda_i-\Lambda_j)$ $(i<j)$，$\pm(\Lambda_l+\Lambda_m+\Lambda_n)$ $(l<m<n)$ であることがわかる．

したがってルートの基本系としては

$$\Lambda_1-\Lambda_2,\quad \cdots,\quad \Lambda_7-\Lambda_8,\quad \Lambda_6+\Lambda_7+\Lambda_8$$

をとればよいことがわかる．たとえば $\Lambda_1-\Lambda_9$ は

$$\begin{aligned}\Lambda_1-\Lambda_9&=2\Lambda_1+\Lambda_2+\cdots+\Lambda_8\\&=2(\Lambda_1-\Lambda_2)+3(\Lambda_2-\Lambda_3)+4(\Lambda_3-\Lambda_4)+5(\Lambda_4-\Lambda_5)\end{aligned}$$

$$+6(\Lambda_5-\Lambda_6)+4(\Lambda_6-\Lambda_7)+2(\Lambda_7-\Lambda_8)+3(\Lambda_6+\Lambda_7+\Lambda_8)$$

と表される．これから Dynkin 図形を計算すれば，$\Lambda_6+\Lambda_7+\Lambda_8$ は $\Lambda_5-\Lambda_6$ とだけ連結しているからこのリー代数が E_8 型の例外リー代数であることがわかる．

さて E_7 型と E_6 型についてのべる前に一般論を行うことにする．

いま L を複素単純リー代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数，$\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ をその単純ルートの全体とする．いま α を単純ルートとするとき $X_{\pm\alpha}$ を $L_{\pm\alpha}$ の生成元で $[X_\alpha, X_{-\alpha}]=H_\alpha$ となるものとする．すなわち $X_{-\alpha}$ は前に Y_α とかいたものである．

いま $\Delta_0\subseteq\Delta$ は Dynkin 図形のなかで連結な Δ の部分集合とする．いま L^0 を

$$\{X_{\pm\alpha}\,|\,\alpha\in\Delta_0\}$$

から生成された L の部分リー代数とする．このとき Δ_0 から生成される正のルートの全体を $\Phi_0{}^+$ とおけば L^0 は明らかに次の形である：

$$L^0=\sum_{\alpha\in\Phi_0{}^+}H_\alpha\oplus\sum_{\alpha\in\Phi_0{}^+}X_{\pm\alpha}$$

明らかに $\sum_{\alpha\in\Phi_0{}^+}H_\alpha$ が L^0 の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_0$ となっている．作り方からいって L^0 が複素単純リー代数になっていて L^0 の Dynkin 図形は L の Dynkin 図形から Δ_0 に入っていない点とそれに結びついた線分を取り去ったものになっていることは明らかである．

さて前に作った E_8 の例外リー代数を $\tilde{L}=L\oplus V\oplus V^*$ の $\tilde{L}$ に上の一般論を適用することにして $\tilde{L}$ のルートの基本系 Δ を次のものとする：

$$\Lambda_1-\Lambda_2,\qquad \cdots,\qquad \Lambda_7-\Lambda_8,\qquad \Lambda_6+\Lambda_7+\Lambda_8$$

いま Δ_0 として次のものをとる：

$$\Lambda_2-\Lambda_3,\qquad \cdots,\qquad \Lambda_7-\Lambda_8,\qquad \Lambda_6+\Lambda_7+\Lambda_8$$

こうしてできる $\tilde{L}^0$ が E_7 型の例外リー代数であることは一般論から明らかである．

$\tilde{L}^0$ のルートの全体は次のものとなる：

$$\begin{array}{ll}\pm(\Lambda_i-\Lambda_j) & (2\le i<j\le 8)\\ \pm(\Lambda_i+\Lambda_j+\Lambda_k) & (2\le i<j<k\le 8)\\ \pm(\Lambda_2+\cdots+\Lambda_8-\Lambda_i) & (2\le i\le 8)\end{array}$$

この $\tilde{L}^0$ が具体的には次の形であることは容易にわかるがこれは演習問題とする：

$$\tilde{L}^0=L^0\oplus V^0\oplus V^{*0}$$

ここに L^0 は次の式で定義される：

$$L^0=\{X\in\mathfrak{sl}(9,C)\,|\,X_{j9}=X_{9j}=0\ \ (j\neq 9),\ \ X_{j1}=X_{1j}=0\ \ (j\neq 1)$$

であって $X_{11}=X_{99}\}$

ここに X_{ij} は もちろん X の (i,j) 成分である．さらに V^0 と V^{*0} とは次の形である：

$$V^0=\{v_{ijk}\in V\,|\,i,j,k \text{ のなかのちょうど1個が1か9であれば } v_{ijk}=0\}$$

$$V^{*0}=\{v^{ijk}\in V^*\,|\,i,j,k \text{ のなかのちょうど1個が1か9であれば } v^{ijk}=0\}$$

もちろん $\tilde{L}^0$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_0$ は L^0 のなかの対角行列の全体になっている．これから E_7 型の例外リー代数の次元を計算すれば 133 次元であることがわかる．

さて E_6 型例外リー代数を作るために上の $\tilde{L}$ の Δ の部分 Δ_{00} を次のものとする：

$$\Lambda_3-\Lambda_4,\quad \cdots,\quad \Lambda_7-\Lambda_8,\quad \Lambda_6+\Lambda_7+\Lambda_8$$

こうして一般論からできる $\tilde{L}^{00}$ が E_6 型例外リー代数であることは明らかである．

$\tilde{L}^{00}$ のルートの全体は次のものとなる：

$$\pm(\Lambda_i-\Lambda_j)\qquad (3\leq i<j\leq 8)$$

$$\pm(\Lambda_i+\Lambda_j+\Lambda_k)\qquad (3\leq i<j<k\leq 8)$$

$$\pm(\Lambda_3+\cdots+\Lambda_8)$$

したがって E_6 型例外リー代数の次元は 78 となる．

$\tilde{L}_{00}$ の具体的な形は次のようになっている：

$$L^{00}+V^{00}+V^{*00}$$

ここに L^{00}, V^{00}, V^{*00} は次のように定義される：

$L^{00}=\{X\in L^0\,|\,X_{2j}=X_{j2}=0\ (j\neq 2)$ で $X_{11}=X_{22}=X_{99}\}$

$V^{00}=\{v_{ijk}\in V\,|\,i,j,k$ のうちのちょうど1個か2個が 1, 2, 9 のいずれかであれば $v_{ijk}=0\}$

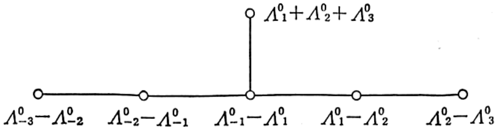
$V^{*00}=\{v^{ijk}\in V^*\,|\,i,j,k$ のうちのちょうど1個か2個が 1, 2, 9 のいずれかであれば $v^{ijk}=0\}$

$\tilde{L}^{00}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_{00}$ は ちょうど L^{00} の対角線のなす行列の全体になっている．

さて E_6 型の Dynkin 図形は見事な対称をもっている．これを利用して F_4 型の例外リー代数を作ることにする．まず上の $\tilde{L}^{00}$ において $\Lambda_i{}^0$ を

$$\Lambda_i=\Lambda_{i-6}{}^0\qquad (i<6),\qquad \Lambda_i=\Lambda_{i-5}{}^0\qquad (i>5)$$

によって定義する．このとき E_6 の Dynkin 図形は次の形になる：



いま E_6 の単純ルート α に対し α' を対応させる対応を次のように定義する：

$$(\Lambda_i{}^0-\Lambda_{i+1}{}^0)'=(\Lambda_{-(i+1)}{}^0-\Lambda_{-i}{}^0)\qquad (i=\pm1,\pm2)$$

$$(\Lambda_1{}^0+\Lambda_2{}^0+\Lambda_3{}^0)'=\Lambda_1{}^0+\Lambda_2{}^0+\Lambda_3{}^0$$

$$(\Lambda_{-1}{}^0-\Lambda_1{}^0)'=(\Lambda_{-1}{}^0-\Lambda_1{}^0)$$

明らかに上の Dynkin 図形で中央を固定して左右を入れ換えたものになっている．明らかにこの写像は §9 の定理2によって $\tilde{L}^{00}$ から $\tilde{L}^{00}$ への同型写像 φ を作り，φ^2 は恒等写像であり $\varphi(X_\alpha)=X_{\alpha'}$ となる．いま $\tilde{L}^4$ を $\varphi(X)=X$ をみたす元の全体として定義する．$\tilde{L}^4$ は明らかに複素リー代数になっている．

いま $\alpha\longrightarrow\alpha'$ という変換をすべてのルートについて表にすれば次の形になっている：

$$(\Lambda_i{}^0-\Lambda_j{}^0)'=\Lambda_{-j}{}^0-\Lambda_{-i}{}^0\qquad (i\neq j)$$

$$(\pm(\Lambda_i{}^0+\Lambda_j{}^0+\Lambda_k{}^0))'=\pm(\Lambda_p{}^0+\Lambda_q{}^0+\Lambda_r{}^0)$$

$$(\text{ここに } \{p,q,r\}=\{-3,-2,-1,1,2,3\}-\{i,j,k\})$$

$$(\pm(\Lambda_{-3}{}^0+\Lambda_{-2}{}^0+\cdots+\Lambda_3{}^0))'=\pm(\Lambda_{-3}{}^0+\cdots+\Lambda_3{}^0)$$

ここでたとえば最後のものは

$$\begin{aligned}\Lambda_{-3}{}^0+\cdots+\Lambda_3{}^0=(\Lambda_{-3}{}^0-\Lambda_{-2}{}^0)+2(\Lambda_{-2}{}^0-\Lambda_{-1}{}^0)+3(\Lambda_{-1}{}^0-\Lambda_1{}^0)\\+2(\Lambda_1{}^0-\Lambda_2{}^0)+(\Lambda_2{}^0-\Lambda_3{}^0)+2(\Lambda_1{}^0+\Lambda_2{}^0+\Lambda_3{}^0)\end{aligned}$$

と単純ルートの和でかいたときに左右対称になっていることから明らかである．

いま E_6 のルートを $\alpha'=\alpha$ になるものと $\alpha'\neq\alpha$ のものとの2つに分ける．$\pm(\Lambda_{-i}{}^0+\Lambda_i{}^0)$ の6個と $\pm(\xi_{\pm1}+\xi_{\pm2}+\xi_{\pm3})$ の 16 個と $\pm(\Lambda_{-3}{}^0+\cdots+\Lambda_3{}^0)$ の2個で合計24個あり，$\alpha\neq\alpha'$ なるルートは残りの 48 個となる．

いま $\tilde{L}_\alpha{}^{00}$ の生成元 X_α を $\alpha=\Lambda_i{}^0-\Lambda_j{}^0$ のときは X_{i-j}, $\alpha=\pm(\Lambda_i{}^0+\Lambda_j{}^0+\Lambda_k{}^0)$ のときは $X_{\pm(i+j+k)}$, $\alpha=\pm(\Lambda_{-3}{}^0+\cdots+\Lambda_3{}^0)$ のときは $X_{\pm(-3+\cdots+3)}$ と略記することにする．このとき $\Lambda_{-2}{}^0-\Lambda_2{}^0=(\Lambda_{-2}{}^0-\Lambda_{-1}{}^0)+(\Lambda_{-1}{}^0-\Lambda_1{}^0)+(\Lambda_1{}^0-\Lambda_2{}^0)$ であるから

$$0\neq[[X_{-2-(-1)},X_{-1-1}],X_{1-2}]\in\tilde{L}_{-2-2}{}^{00}$$

ここに $\tilde{L}_{-2-2}{}^{00}$ も X と同様の略記号である．これから φ が $\tilde{L}_{-2-2}{}^{00}$ の上では恒等写像であることがわかる．同様にして φ は $L_{-i-i}(i=\pm1,\pm2,\pm3)$ の上で恒等写像であるこ

とがわかる．次に

$$\Lambda_{-1}^0+\Lambda_2^0+\Lambda_3^0=(\Lambda_{-1}^0-\Lambda_1^0)+(\Lambda_1^0+\Lambda_2^0+\Lambda_3^0)$$

であるから

$$[X_{1+2+3}, X_{-1-1}]\in\tilde{L}_{-1+2+3}^{00}$$

となり φ が $\tilde{L}_{-1+2+3}^{00}$ の上で恒等写像であることがわかる．同様の議論で φ が $L_{(\pm1\pm2\pm3)}$ の上で恒等写像であることがわかる．またさらに

$$[X_{-3+(-2)+(-1)}, X_{1+2+3}]\in\tilde{L}_{-3+\cdots+3}^{00}$$

となるから以上を総合してすべての $\alpha=\alpha'$ をみたすルート α について φ が $\tilde{L}_\alpha^{00}$ の上で恒等写像であることがわかる．

いま φ^2 は恒等写像であるから，$\tilde{L}_\alpha^{00}$ の生成元 X_α を上手にとって次の条件をみたしているようにできる：

$$\varphi(X_\alpha)=X_{\alpha'}\quad で\qquad \kappa(X_\alpha, X_{-\alpha})=1$$

このとき $\mathfrak{h}^4$ を次の式で定義すれば

$$\mathfrak{h}^4=\{H\in\mathfrak{h}^{00}|\varphi(H)=H\}$$

$\tilde{L}^4$ の基底は次のものからできていることがわかる：

（i） $\mathfrak{h}^4$ の基底．

（ii） 24 の X_α　ここに $\alpha=\alpha'$ とする．

（iii） 24 の $X_\alpha+X_{\alpha'}$　ここに $\alpha\neq\alpha'$ とする．

§9 の定理 2 によって $\varphi(H_\alpha)=H_{\alpha'}$ となるから Δ_{00} の元で $\alpha=\alpha'$ をみたすものは 2 個，$\alpha\neq\alpha'$ となるものは 4 個ある．これから $\mathfrak{h}^4$ は $\Lambda_{-1}^0-\Lambda_1^0$, $\Lambda_1^0+\Lambda_2^0+\Lambda_3^0$, $\Lambda_{-3}^0-\Lambda_3^0$, $\Lambda_{-2}^0-\Lambda_2^0$ から生成されることがわかるから 4 次元，したがって $\tilde{L}^4$ の次元は $4+24+24=52$ であることがわかる．

さて α と α' とは明らかに $\mathfrak{h}^4$ の上では同じ関数になっている．逆に α と β とが $\mathfrak{h}^4$ の上で同じ関数とすれば $\kappa(H_\alpha,\ H+\varphi(H))=\kappa(H_\beta,\ H+\varphi(H))$, これから $\kappa(H_\alpha+H_{\alpha'}, H)=\kappa(H_\beta+H_{\beta'}, H)$, したがって $\alpha+\alpha'=\beta+\beta'$ がでてくる．すべての α についてα $+\alpha'$ をチェックしてみれば，明らかにこれは $\alpha=\beta'$ か $\alpha=\beta$ の場合だけであることがわかる．これから $\tilde{L}^4$ のルートの全体が $\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')$ の形であり，そのルートを β とすれば $\tilde{L}_\beta{}^4$ は 1 次元であり，$\mathfrak{h}^4$ が 4 次元であることからそのルートの基本系として

$$\frac{1}{2}(\Lambda_{-3}^0-\Lambda_{-2}^0+\Lambda_2^0-\Lambda_3),\qquad \frac{1}{2}(\Lambda_{-2}^0-\Lambda_{-1}^0+\Lambda_1^0-\Lambda_2^0)$$

$$(\Lambda_{-1}^0-\Lambda_1^0),\qquad (\Lambda_1^0+\Lambda_2^0+\Lambda_3^0)$$

をとればよいこと，その Dynkin 図形が F_4 の Dynkin 図形であることがわかって $\tilde{L}^4$ が F_4 型の例外リー代数であることがわかる．

§22. 正則部分リー代数

この節では大統一理論に用いられるリー代数の色々の性質を，余り証明にこだわらずに紹介することにする．

L を半単純複素線形リー代数，L' をその部分リー代数とする．L' が L の**正則部分リー代数**であるということを次の条件がみたされていることと定義する：

L の Cartan 分解

$$L = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

と $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{h}$, $\Phi' \subseteq \Phi$ が存在して

$$L' = \mathfrak{h}' + \sum_{\alpha \in \Phi'} L_\alpha \tag{1}$$

の形になっている．

(1) の形で与えられた L' が部分リー代数となる（したがって正則部分リー代数となる）必要十分条件は次の2つの条件がみたされることである：

A1) $\alpha, \beta \in \Phi',\ \alpha + \beta \in \Phi \implies \alpha + \beta \in \Phi'$

A2) $\alpha, -\alpha \in \Phi' \implies H_\alpha \in \mathfrak{h}'$

この L' がさらに半単純になる必要十分条件は次の2つの条件がみたされることである：

R1) $\alpha \in \Phi' \implies -\alpha \in \Phi'$

R2) $\{H_\alpha | \alpha \in \Phi'\}$ の一次結合の全体が $\mathfrak{h}'$ になっている．

ここで上の A2) は R1) と R2) からでてくる．また以上から正則部分リー代数の全部を調べるためには A1) の条件をみたす Φ' を全部調べればよいことがわかる．

L を半単純複素線形リー代数で Φ をそのルート系とする．このとき Φ の部分集合 Γ が π－システムであるということを次の2つの条件がみたされていることと定義する：

C1) $\alpha, \beta \in \Gamma \implies \alpha - \beta \notin \Phi$

C2) Γ は一次独立である．

定理 1. L を半単純複素線形リー代数で，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ をルートの π－システムとする．このとき L' を $X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m}, X_{-\alpha_1}, \cdots, X_{-\alpha_m}$ から生成された部分リー代数とする．このと

き L' は正則半単純部分リー代数であり，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が単純ルートであるようなルートの基本系が存在する．すべての正則半単純部分リー代数はこの方法で得られる．▯

いま L は複素線形半単純リー代数，Φ をそのルート系，L' を L の正則半単純部分リー代数とする．いま $L' \subseteq L''$ で L'' のルート系 Φ'' が $\Phi'' \subseteq \Phi$ となる L'' を見出すことを考えよう．Γ を L'' に属する単純ルートの全体とする．もちろん Γ は一次独立であって次の条件をみたしている：

$$\alpha, \beta \in \Gamma \implies \alpha - \beta \notin \Gamma$$

A1）の条件からこの条件が C1）の条件を導く．すなわち Γ は π- システムである．

定理 1 によってすべての正則半単純部分リー代数を得る方法はルート系の部分集合で π- システムとなるものをすべて並べあげればよい．

定理 2. L を階数 l の複素半単純線形リー代数とする．すべての π- システムは l 個の元から成る π- システムのなかに含まれる．▯

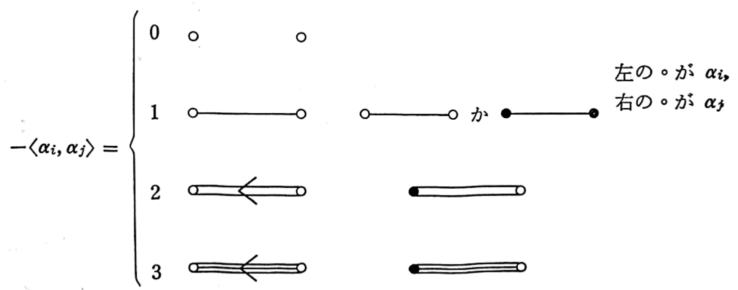
もちろん π- システムの部分集合は π- システムであるから定理 2 によって l 個の元から成る π- システムを全部求めればすべての π- システムが得られることになる．

もちろんすべての連結な π- システムの Dynkin 図形は前の Dynkin 図形の分類と同じく $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ のいずれかになっている．

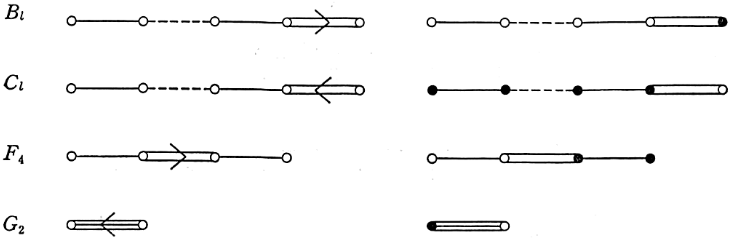
ここで Dynkin 図形について異なったかき方について一言のべることにする．Dynkin 図形はルートの基本系 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ について

$$-\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{-2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

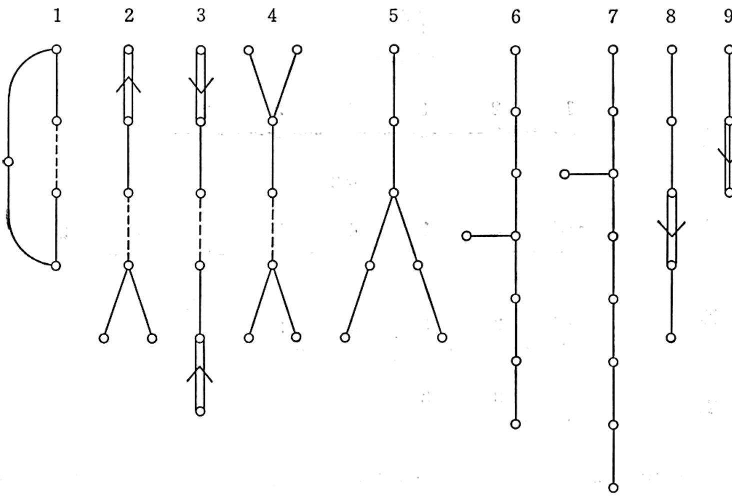
の値によって点 α_i を次のように結んでできるものであった：



ここで別なかき方は上の図式の右側で表すこともある．このかき方と我々のかき方とが1対1に対応することは明らかであろう．このかき方と我々のかき方では A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 は全く同じであるが B_l, C_l, F_4, G_2 は異なるので以下に両方を並べてかいてみる：



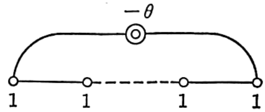
いまルートの集合が C1）をみたすとする．もしこの集合について Dynkin 図形を作れば，その図形が連結ならば上の Dynkin 図形の1つになるか，または次の図形の1つになる．証明は Dynkin 図形の分類と全く同様に行われる．



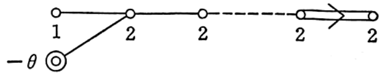
上のすべての図は次にのべる拡大 Dynkin 図形で実現される．いまルートの基本系 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ のほかに最高のルートを θ とする．$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ を $\circ$ で $-\theta$ を ◎ で表して Dynkin 図形を作るのと同じ作り方で図形を作れば次のページの図式の形になる．ここに頂点 $\circ$ についている数は $\theta = \sum m_i \alpha_i$ の係数 m_i を表す．

以前の図がすべて拡大 Dynkin 図形のなかに実現されていることは明らかであろう．

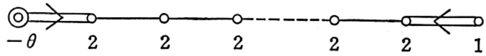
A_l
$(l \geq 1)$



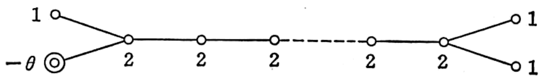
B_l
$(l \geq 2)$



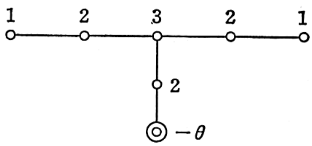
C_l
$(l \geq 3)$



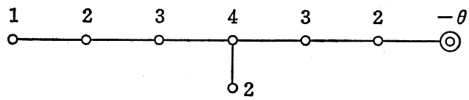
D_l
$(l \geq 4)$



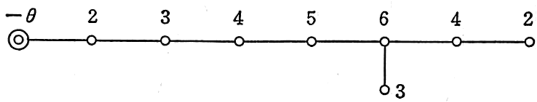
E_6



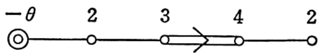
E_7



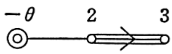
E_8



F_4



G_2



半単純複素線形リー代数の正則部分リー代数を見出す問題は，次の定理によってすべて単純複素線形リー代数の場合に還元される．

定理 3.　L を半単純複素線形リー代数とし，L の単純リー代数であるイデアルの直積への分解を

$$L = L_1 + \cdots + L_r$$

とする L_k' を L_k の正則部分リー代数とすれば

$$L' = L_1' + \cdots + L_r'$$

は L の正則部分リー代数であり，すべての L の正則部分リー代数はこの形になっている．▯

古典リー代数 A_l, B_l, C_l, D_l についての最高の階数をもった正則半単純部分リー代数は次の形になっている．すなわち一般の正則半単純部分リー代数はあとでのべる D_l の例外を除いては Weyl 群の元によって表にある部分代数のどれかに移り得る．

正則半単純部分リー代数の表

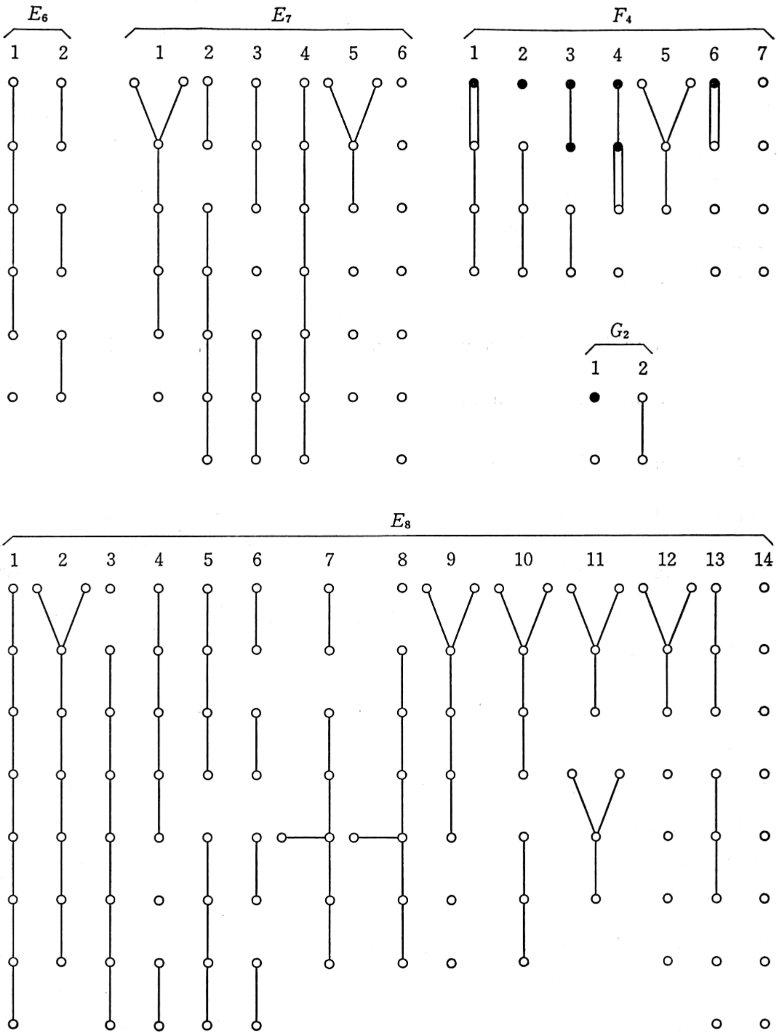
A_l	$A_{k_1} + \cdots + A_{k_s}$	$\sum_{i=1}^{s} (k_i + 1) = l + 1$
B_l	$A_{k_1} + \cdots + A_{k_s} + D_{m_1} + \cdots + D_{m_r} + B_m$	$\sum_{i=1}^{s} (k_i + 1) + \sum_{i=1}^{r} m_i + m = l$
C_l	$A_{k_1} + \cdots + A_{k_s} + C_{l_1} + \cdots + C_{l_r}$	$\sum_{i=1}^{s} (k_i + 1) + \sum_{i=1}^{r} l_i = l$
D_l	$A_{k_1} + \cdots + A_{k_s} + D_{m_1} + \cdots + D_{m_r}$	$\sum_{i=1}^{s} (k_i + 1) + \sum_{i=1}^{r} m_i = l$

$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s \geq 0, \quad l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_r > 0, \quad m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r > 1, \quad m \geq 0$

ここに D_l については奇数の $k_1, k_2, \cdots, k_s$ で $r = 0$ の場合にはその型の 2 つの正則半単純部分リー代数で Weyl 群の元では移り得ないが D_l の外部自己同型写像で移り得るものが対応している．

例外リー代数についての最高の階数をもった正則半単純部分リー代数は次のページの図式で与えられる．

この図の意味をいえば，たとえば E_7 の最高の階数の正則半単純部分リー代数は $D_6 + A_1$, $A_5 + A_2$, $2A_3 + A_1, A_7$, $D_4 + 3A_1$, $7A_1$ の形となる．ここでもちろん $2A_3 + A_1$ は $A_3 + A_3 + A_1$ のことである $D_4 + 3A_1$, $7A_1$ も同様である．同じ型の正則半単純部分リー代数は大抵の場合もとの単純リー代数の自己同型によって移り得る．次に例外リー代数の正則半単純部分リー代数の表をかくことにする．ここに・に対応するものはたとえば A_2 ならば $A_2^{\bullet}$ とかくことにする．次に $[A_5 + A_1]', [A_5 + A_1]''$ と 2 つあるときは自己同型写像で移り得る組を意味している．$[4A_1]', [4A_2]''$ なども同様である．もっと詳しくいえば E_7 の場合には [ ]′ は A_7 に含まれるものであるし，[ ]″ は A_7 に含まれないものである．E_8 の場合は [ ]′ は A_8 に含まれるもので [ ]″ は A_8 に含まれないものである．


E_6
E_7
F_4
G_2
E_8

例外リー代数の正則半単純部分リー代数の表

G_2

A_2	A_1
$A_1 + A_1^{\cdot}$	$A_1^{\cdot}$

F_4

B_4	$2A_1 + A_1^{\cdot}$
$A_3 + A_1^{\cdot}$	$A_1 + A_2^{\cdot}$
$A_2 + A_2^{\cdot}$	C_3
$C_3 + A_1$	$3A_1$
D_4	A_2
$B_2 + 2A_1$	B_2
$4A_1$	$A_1 + A_1^{\cdot}$
B_3	$2A_1$
$B_2 + A_1$	$A_2^{\cdot}$
$A_2 + A_1^{\cdot}$	$A_1^{\cdot}$
A_3	A_1

E_6

$A_5 + A_1$	$A_2 + 2A_1$
$3A_2$	$4A_1$
A_5	D_4
$2A_2 + A_1$	A_3
$A_4 + A_1$	$A_2 + A_1$
D_5	$3A_1$
$A_3 + 2A_1$	A_2
A_4	$2A_1$
$A_3 + A_1$	A_1
$2A_2$	

E_7

$D_6 + A_1$	$3A_2$	D_4
$A_5 + A_2$	$2A_3$	A_4
$2A_3 + A_1$	A_6	$[A_3 + A_1]'$
A_7	$6A_1$	$[A_3 + A_1]''$
$D_4 + 3A_1$	D_5	$2A_2$
$7A_1$	$A_4 + A_1$	$A_2 + 2A_1$
E_6	$[A_5]'$	$[4A_1]'$
$D_5 + A_1$	$[A_5]''$	$[4A_1]''$
$A_4 + A_2$	$2A_2 + A_1$	A_3
$A_3 + A_2 + A_1$	$D_4 + A_1$	$A_2 + A_1$
$[A_5 + A_1]'$	$A_3 + A_2$	$[3A_1]'$
$[A_5 + A_1]''$	$5A_1$	$[3A_1]''$
D_6	$A_2 + 3A_1$	A_2
$D_4 + 2A_1$	$[A_3 + 2A_1]'$	$2A_1$
$A_3 + 3A_1$	$[A_3 + 2A_1]''$	A_1

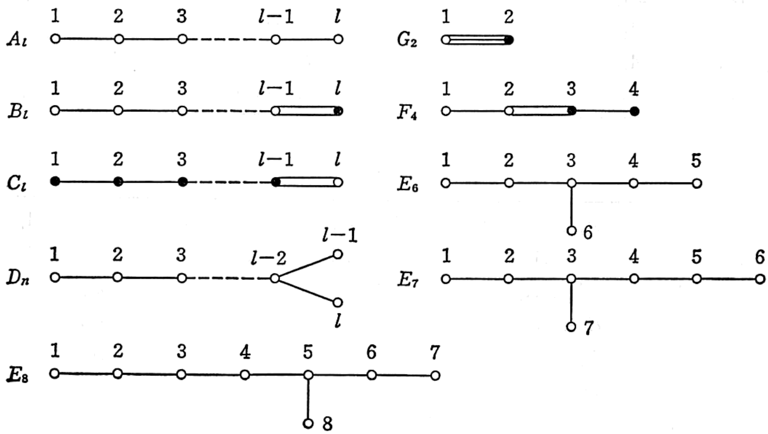
E_8

A_8	$A_4 + A_2 + A_1$	$A_4 + A_3$	$A_4 + 2A_1$	$A_2 + 3A_1$
D_8	$A_5 + A_2$	$A_5 + 2A_1$	A_6	$2A_2 + A_1$
$A_7 + A_1$	$3A_2 + A_1$	$[A_7]'$	$A_3 + A_2 + A_1$	D_4
$A_5 + A_2 + A_1$	$E_6 + A_1$	$[A_7]''$	$[A_5 + A_1]'$	$[4A_1]'$
$2A_4$	E_7	$3A_2$	$[A_5 + A_1]''$	$[4A_1]''$
$4A_2$	D_7	E_6	$A_4 + A_2$	$A_2 + 2A_1$
$A_6 + A_2$	$D_5 + 2A_1$	D_6	$2A_2 + 2A_1$	$2A_2$
$A_7 + A_1$	$D_4 + 3A_1$	$D_4 + 2A_1$	D_5	$A_3 + A_1$
$D_6 + 2A_1$	$2A_3 + A_1$	$[2A_3]'$	$[A_3 + 2A_1]'$	A_4
$D_5 + A_3$	$7A_1$	$[2A_3]''$	$[A_3 + 2A_1]''$	A_3
$2D_4$	$D_6 + A_1$	$D_5 + A_1$	$A_3 + A_2$	$A_2 + A_1$
$D_4 + 4A_1$	$D_5 + A_2$	$A_3 + 3A_1$	A_5	$3A_1$
$2A_2 + 2A_1$	$A_3 + A_2 + 2A_1$	$D_4 + A_2$	$5A_1$	A_2
$8A_1$	$D_4 + A_3$	$6A_1$	$A_4 + A_1$	$2A_1$
$A_6 + A_1$	$A_3 + 4A_1$	$A_2 + 4A_1$	$D_4 + A_1$	A_1

定理 4. L を半単純複素線形リー代数，Φ をそのルート系とし，Δ をその基本系とする．Δ_α は Δ から α を除いてできたもの，θ を最高のルートとする．

$L(\alpha)$ によって $X_\beta, X_{-\beta}(\beta \in \Delta_\alpha)$ と $X_\theta, X_{-\theta}$ によって生成された部分リー代数を表すことにする．さらに $L[\alpha]$ によって $X_\beta, X_{-\beta}(\beta \in \Delta_\alpha)$ と H_α, X_α によって生成された部分リー代数を表すことにする．すべての $\alpha \in \Delta$ について $L[\alpha]$ は極大正則部分リー代数である．また $L(\alpha)$ $(\alpha \in \Delta)$ も L でないときは極大正則部分リー代数である．さらにすべての極大正則部分リー代数は L の自己同型によって上のいづれかに移り得る．▯

この $L(\alpha), L[\alpha]$ は正則部分リー代数のなかで極大なだけではなくて，すべての L の部分リー代数のなかで極大になっている．次に L 以外の $L(\alpha)$ の形の部分リー代数の表をあげることにする．表のなかのルートの番号は次の図式のような番号付けによる．N の項はその部分代数の次元を表す．



L	$L(\alpha)$	N
B_l	$L(\alpha_k) = D_k + B_{l-k}$ $(k = 2, 3, \cdots, l)$	$k(2k-1) + (l-k)(2l-2k+1)$
C_l	$L(\alpha_k) = C_k + C_{l-k}$ $(k = 1, 2, \cdots, l)$	$k(2k+1) + (l-k)(2l-2k+1)$
D_l	$L(\alpha_k) = D_k + D_{l-k}$ $(k = 2, 3, \cdots, l-2)$	$k(2k-1) + (l-k)(2l-2k-1)$
G_2	$L(\alpha_1) = A_1 + A_1^{\bullet}$ $L(\alpha_2) = A_2$	6 8
F_4	$L(\alpha_1) = A_1 + C_3$ $L(\alpha_2) = A_2 + A_2^{\bullet}$ $L(\alpha_3) = A_3 + A_1^{\bullet}$ $L(\alpha_4) = B_4$	24 16 18 36
E_6	$L(\alpha_2) = L(\alpha_4) = L(\alpha_6) = A_5 + A_1$ $L(\alpha_3) = 3A_2$	38 24
E_7	$L(\alpha_1) = L(\alpha_5) = D_6 + A_1$ $L(\alpha_2) = L(\alpha_4) = A_5 + A_2$ $L(\alpha_3) = 2A_3 + A_1$ $L(\alpha_7) = A_7$	69 43 33 63
E_8	$L(\alpha_1) = A_1 + E_7$ $L(\alpha_2) = A_2 + E_6$ $L(\alpha_3) = A_3 + D_5$ $L(\alpha_4) = 2A_4$ $L(\alpha_5) = A_5 + A_2 + A_1$ $L(\alpha_6) = A_7 + A_1$ $L(\alpha_7) = D_8$ $L(\alpha_8) = A_8$	136 86 60 48 46 66 136 80

すべての極大正則半単純部分リー代数は上の表に次の表を付け加えればよい．

A_l	$A_k + A_{l-1-k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, l-1)$	$k(k+2) + (l-1+k)(l+1+k)$
B_l	B_{l-1}	$(l-1)(2l-1)$
C_l	A_{l-1}	$(l-1)(l+1)$
D_l	D_{l-1} A_{l-1}	$(l-1)(2l-3)$ $(l-1)(l+1)$
E_6	D_5	45
E_7	E_6	78

定理 5. L は半単純複素線形リー代数で L' はその部分リー代数とする．もし L' の階数が L の階数に等しければ L' は正則部分リー代数である．

定理 6. 半単純複素線形リー代数のイデアルは常に正則部分リー代数である．

5 大統一理論

§23. 数学から物理学へ

この章では数学者のために大統一理論の紹介をすることにする．ここで数学者とは数学をよく知っている人の意味ではなくて，物理を知らない人の意味で用いられている．

まずこの章では記号をなるべく数学で用いられているものから物理で用いられているものに変更する．

たとえばヒルベルト空間または一般に線形空間の上の作用素を演算子と呼ぶ．ヒルベルト空間の演算子の共役を Hermite（エルミート）共役といい，H.C. と略記する．すなわち A とか φ とかが演算子のときにその H.C. というのは，A および φ の Hermite 共役演算子を意味する．これを今後 $A^\dagger$ および $\varphi^\dagger$ で表すことにする．以前の記号は A の場合は A^* であったから注意を要する．さらにヒルベルト空間の上の自己共役な演算子を Hermite 演算子と呼ぶ．さらに，$*$ は複素数および演算子には単なる複素共役として用いることにする．いままでの複素共役の記号は $\bar{\ }$ であったから，このあたりは一番混乱しやすいところであるから注意を要する（$\bar{\ }$ は物理的な意味をもった別の記号になる）．

x は x^0, x^1, x^2, x^3 という座標をもった4次元のベクトルを意味する．ここに x^0 は時間を表し x^1, x^2, x^3 は xyz 座標系での x, y, z を表す．

添字の μ, ν は上の意味での $0,1,2,3$ を表す．

$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ を

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

によって定義することにする．そうして，添字 μ,ν の上げ下げはこの $g_{\mu\nu}$ によってすることにする．μ,ν に限らず，すべての添字についてアインシュタインの規約を用いる．すなわち単項式のなかに添字が2度現れるときはその添字についての $\sum$ が単項式の前にあるのが省略されているものとする．

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

によって $\partial_\mu, \partial^\mu$ を定義する．

3次元の反対称テンソル $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ を

$$\varepsilon^{ijk} = 0 \qquad (i,j,k \text{ のなかに同じものが2つあるとき})$$

$$\varepsilon^{ijk} = 1 \qquad ((i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の偶置換のとき})$$

$$\varepsilon^{ijk} = -1 \qquad ((i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の奇置換のとき})$$

と定義する．ε_{ijk} は Levi-Civita（レビ―チビタ）の記号と呼ばれる．

ヒルベルト空間の上の恒等演算子を I でかく．したがってヒルベルト空間が C^n の場合はいままで E とかいたところを I とかくわけである．

Pauli（パウリ）行列 $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ を

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表す．$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ は Hermite 演算子になっている．明らかにわかるように $i\sigma^1, i\sigma^2, i\sigma^3$ は $\mathfrak{su}(2)$ の生成元になっている．

さてここで $\mathfrak{su}(2)$ について物理との関係をのべることにする．最初に $\mathfrak{su}(2)$ は $\mathfrak{so}(3)$ および $\mathfrak{o}(3)$ と同型である．

ここに $\mathfrak{so}(n), \mathfrak{o}(n)$ は，一般に $SO(n), O(n)$ を

$$O(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \,|\, {}^t\!AA = E\}$$

$$SO(n) = \{A \in O(n) \,|\, \det A = 1\}$$

によって定義して $\mathfrak{so}(n)$，$\mathfrak{o}(n)$ はそれぞれ $SO(n)$，$O(n)$ のリー代数となっている．

$O(n)$，$SO(n)$ はそれぞれ直交群，特殊直交群といわれ，$SO(3)$ は3次元ユークリッド空間の回転の群になっており，$O(3)$ は $SO(3)$ と空間反転から生成される線形リー群になっている．したがって $O(3)$ と $SO(3)$ とは我々の空間のなかでの運動に密接な関係をもっている．

行列式は行列の連続関数であるから，$O(n)$ の単位元の近傍ではその行列式は常に1と

なる ($O(n)$ の行列の行列式は ± 1 のいずれかである). したがって $\mathfrak{o}(n)=\mathfrak{so}(n)$ であることがわかる. $\mathfrak{su}(n)$ のときの計算と全く同じ計算で次のことがわかる：

$$\mathfrak{o}(n)=\mathfrak{so}(n)=\{X\in M(n,\boldsymbol{R})\,|\,{}^tX+X=0\}$$

この式から $\mathfrak{o}(3)$ の生成元として，次の形をとればよいことがわかる：

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\qquad A_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

この交換関係を調べれば

$$[A_1,A_2]=A_3,\qquad [A_2,A_3]=A_1,\qquad [A_3,A_1]=A_2$$

次に B_1,B_2,B_3 を

$$B_i=\frac{1}{2}i\sigma_i\qquad (i=1,2,3)$$

とおけば B_1,B_2,B_3 は $\mathfrak{su}(2)$ の生成元であって，その交換関係は

$$[B_1,B_2]=B_3,\qquad [B_3,B_2]=B_1,\qquad [B_3,B_1]=B_2$$

となるから $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{o}(3)$ とが同型であることがわかる.

したがって $SU(2)$, $O(3)$, $SO(3)$ は単位元の近傍では同型である. もちろん群全体としては同型ではない.

$\mathfrak{su}(2)$ は $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の実形であるから $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の理論がそのまま使える.

ここで数学と物理学との間の記号のくい違についてのべる. 物理学では物理量が Hermite 演算子に対応するため，すべてのものをなるべく Hermite 演算子で表そうとする. それがたとえば $\mathfrak{so}(3)$ を調べるとき Pauli の行列を考えるということになる. たとえば上の B_1,B_2,B_3 は Hermite でない，したがってこれは物理量を表さない. このため物理では対応する Hermite 演算子 $\frac{1}{2}\sigma_1$, $\frac{1}{2}\sigma_2$, $\frac{1}{2}\sigma_3$ を考えるということになる.

さて数学での $\mathfrak{su}(2)$ の理論とその物理的表現との関係についてのべることにする.

さて $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の生成元は

$$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

であった. これは $H=\sigma_3$ となるから都合がよい. いま ρ を $\mathfrak{o}(3)$ の既約表現として，対応する $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の既約表現も同じ ρ で表すことにする.

$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の階数 l は 1 である. $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の単純ルートは $\alpha=\Lambda_1-\Lambda_2$ で,

$$X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

とおけば

$$[H,X]=2X,\qquad [H,Y]=-2Y,\qquad [X,Y]=H$$

である．

ρ の表現空間の次元を $m+1$，原始ベクトルを $v_0, v_i (1\leq i\leq m)$ を次の式で定義すれば

$$\rho(Y)v_i=(i+1)v_{i+1}$$

$v_0, v_1, \cdots, v_m$ が表現空間の基底になって

$$\rho(H)v_i=(m-2i)v_i,\qquad \rho(X)v_i=(m-i+1)v_{i-1}$$

となるから $\rho(H)$ の固有値は $m, m-2, \cdots, -m$ となる．基本的ウェイトは $\lambda=\dfrac{1}{2}\alpha$ であり，最高のウェイトは $\rho(H)v_0=mv_0=m\lambda(H)v_0$ であるから $m\lambda$ である．一般のウェイト μ は $\mu=m\lambda-k\alpha$ すなわち $\mu=(m-2k)\lambda$ でそのウェイト空間 V_μ は v_k で生成される．したがって $\rho(X)$ は $m-2k$ で表されるウェイト空間を $m-2(k-1)$ のウェイト空間にあげる操作で，$\rho(Y)$ は $m-2k$ で表されるウェイト空間を $m-2(k+1)$ のウェイト空間に下げる操作ということになる．

さて対応する物理の理論を考えよう．

$$J_x=\rho\left(\frac{1}{2}\sigma_1\right),\qquad J_y=\rho\left(\frac{1}{2}\sigma_2\right),\qquad J_z=\rho\left(\frac{1}{2}\sigma_3\right)$$

とおこう．$J_z=\dfrac{1}{2}\rho(H)$ となっている．

X, Y が重要であるが X も Y も $\mathfrak{sl}(2,C)$ の元であって $\mathfrak{su}(2)$ の元ではない．したがって X や Y を $\mathfrak{su}(2)$ の元で表すことが必要となる．

明らかに X と Y とは σ_1, σ_2 で次のように表される：

$$X=\frac{\sigma_1}{2}+i\frac{\sigma_2}{2},\qquad Y=\frac{\sigma_1}{2}-i\frac{\sigma_2}{2}$$

したがって

$$J_+=J_x+iJ_y,\qquad J_-=J_x-iJ_y$$

とおけば

$$\rho(X)=J_+,\qquad \rho(Y)=J_-$$

となって J_+ がウェイト空間を上げ，J_- がウェイト空間を下げる操作であることがわかる．

さらに

$$J_x=\frac{1}{2}(\rho(X)+\rho(Y)),\qquad J_y=\frac{1}{2i}(\rho(X)-\rho(Y))$$

であるから

$$J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2$$

とおけば

$$J^2=\frac{1}{4}(2\rho(X)\rho(Y)+2\rho(Y)\rho(X)+\rho(H)^2)$$

となって $m_0=\dfrac{m}{2}$ とおけば

$$J^2v_i=\frac{1}{4}(2(m-i)(i+1)+2i(m-i+1)+(m-2i)^2)v_i$$
$$=(m_0{}^2+im_0)v_i$$

となるから $v_0,\cdots,v_m$ で J^2 は対角化されていて，その最大の固有値は v_0 の場合 $m_0{}^2$ となっている．すなわち J の最大の固有値は m_0 となる．この m_0 を用いて J_z の固有値をかけば

$$m_0,\quad m_0-1,\quad \cdots,\quad -m_0$$

となっており m_0 は半整数となる．

以上が量子力学の最初に角運動量の理論として教えるところである．すなわち角運動量の理論として教えているものは $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の既約表現論をやっていることになっている．

次に $m\lambda$ を単に m とかくことにして $m\lambda$ に属する $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の既約表現を $V(m)$ とかくことにする．すなわち $V(m)$ は次元が $m+1$ となる $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の既約表現とする．

このとき §14 の記号 $\mathrm{ch}_{V(m)}$ は一般には

$$\mathrm{ch}_{V(m)}=\sum_{\mu} m(\mu)e(\mu)$$

となる．ここに μ は $V(m)$ に属するウェイト，$m(\mu)$ はそのウェイトの重複度，$e(\mu)$ は μ に対応する形式的な記号である．$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ の場合は $m(\mu)=1$ であり，μ は m, $m-2,\cdots,-m$ のいずれかを表している．

いま $n\leq m$ として $V(n)\otimes V(m)$ を考えれば §14 の補題 2 によって

$$\mathrm{ch}_{V(n)\otimes V(m)}=\mathrm{ch}_{V(n)}\cdot\mathrm{ch}_{V(m)}$$

ここで $e(\mu_1)\cdot e(\mu_2)=e(\mu_1+\mu_2)$ という定義を思いだせば

$$\mathrm{ch}_{V(n)\otimes V(m)}=\left(\sum_{i=0}^{n}e(n-2i)\right)\left(\sum_{j=0}^{m}e(m-2j)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} e(n+m-2(i+j))$$
$$= \mathrm{ch}_{V(n+m)} + \mathrm{ch}_{V(n+m-1)} + \cdots + \mathrm{ch}_{V(m-n)}$$

となる（このような形に必ず表すことができるというのが §14 の補題1である）．

すなわち次の式が得られた：

$$V(m) \otimes V(n) \simeq V(m+n) \oplus V(m+n-2) \oplus \cdots \oplus V(m-n)$$

すなわち $V(m) \otimes V(n)$ は $n+1$ 個の既約表現の直和になっている．この公式を Clebsh-Gordan（クレブッシューゴルダン）の公式という．

もちろん $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{o}(3)$ でも同じ式が成立し，物理では角運動量の和の公式として知られている．物理では $m_0 = \dfrac{m}{2}$ として m の代りに m_0 で表すことが多い．

$[A, B]$ は前と同じく $AB - BA$ であるが，この他に $\{A, B\}$ を次の式で定義する：

$$\{A, B\} = AB + BA$$

σ^i を無限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の上の演算子と考えることが多い．これはたとえば σ^1 は

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

の形の $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ の上の演算子と考えてもよいし，$\mathcal{H}$ の互いに関係のある2つの演算子 φ_1, φ_2（または2つのベクトルのときもある）について

$$\sigma^1 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

として，2つの演算子を同時に取り扱うときの形式だと思ってもよい．

Dirac（ディラック）行列 γ^μ には4次元の行列で，γ^0 は Hermite, $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ は反 Hermite すなわち $i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3$ が Hermite で次の条件をみたすものである：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

$\gamma_5 = \gamma^5$ を次の式で定義する（γ^5 は物理の本によって定義がさまざまである）：

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

次の色々の式が成立する．物理学者はスラスラと計算するが数学者には苦手である．しかしある程度慣れるより仕方がないから 2，3 を計算して確かめるのがよいと思う．

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = \gamma_5{}^\dagger$$

$$(\gamma_5)^2 = I, \qquad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}, \qquad \gamma^0\gamma_5\gamma^0 = -\gamma_5{}^\dagger = -\gamma_5$$

$$\gamma^0(\gamma_5\gamma^\mu)\gamma^0 = (\gamma_5\gamma^\mu)^\dagger$$

この γ^μ に対して，次の条件をみたす荷電共役演算子 C が定義できる：

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu{}^T, \qquad C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5{}^T$$

$$C^{-1}(\gamma_5\gamma_\mu)C = (\gamma_5\gamma_\mu)^T$$

ここで T はいままで ${}^tA$ とかいたものを A^T とかいているのであるが，ただし A が演算子の行列

$$A = (\varphi_{\mu\nu})$$

であるとき $A^T = (\varphi_{\mu\nu}{}')$ としたとき $\varphi_{\mu\nu}{}' = \varphi_{\nu\mu}$ であって，$\varphi_{\mu\nu}{}' = \varphi_{\nu\mu}{}^T$ のようには考えないことにする．よって T は4次元の行列についてだけの特別な記号ということにする．

γ^μ や C を4次元の行列として具体的に表現する方法はただ一通りに限らない．実際に物理の本や論文はその論文や本によって具体的な表現が違うので困るのである．しかもその自分流の表現で計算されるので2つの本を見較べたりするときには全く当惑することがある．ここでは具体的な表現にたよらないことにする．

ただし物理で普通用いられる表現では次の性質は大抵みたされているようなので，次の性質はこの本では乱用することにする：

$$C^T = C^\dagger = -C, \qquad CC^\dagger = C^\dagger C = I, \qquad C^2 = -I$$

γ^μ や C ももちろん上の σ^i のときと同じように無限次元のヒルベルト空間の上の演算子と考えることが多い．したがって，γ や C を用いるときの場の演算子 $\varphi(x)$ は実は4個の場の演算子を縦ベクトルの形にかいたものを表すものとする．

さらに Feynman（ファインマン）の記号 $\not{a}$ を

$$\not{a} = a_\mu\gamma^\mu$$

によって定義する．たとえば $\not{\partial}$ とは $\gamma^\mu\partial_\mu$ のことである．

さらに Gell Man（ゲルマン）行列 $\lambda_1, \cdots, \lambda_8$ を

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

と定義する．$i\lambda_1, \cdots, i\lambda_8$ は $\mathfrak{su}(3)$ の生成元になっている．またすべての i について

$$\mathrm{Tr}(\lambda_i{}^2) = 2$$

という関係をみたしている．

ここでアインシュタインの規約について蛇足を付け加えれば，普通の $\vec{a} = (a^1, \cdots, a^n)$ としたときに $\vec{a}^2$ は

$$\vec{a}^2 = a^i \cdot a^i = \sum_i a^i \cdot a^i$$

であるが，$\vec{A}$ が A^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ のときは

$$\vec{A}^2 = A^\mu \cdot A_\mu = A^{02} - A^{12} - A^{22} - A^{32}$$

である．しばしば $\vec{a}^2$ とかかずに a^2 とかいたり，$\vec{A}^2$ とかかずに A^2 とかいたりする．これは色々の状況の規約が重なってできたものでやむを得ない．その都度要心をする以外にない．

§24. ゲージ理論

ゲージ理論は場の量子論に基づいている．もちろんこの本で場の量子論についてのべる余裕はない．したがってここでは以下の話に必要な最低の知識を形式的な体系として導入することにする．その代り，そこでの計算はトリビアルなものまでなるべく詳しくかくことにした．計算を眺めて形式的体系の説明不十分なところを逆に推察してほしい．

以下にのべる素粒子は

スピン $\frac{1}{2}$ のフェルミ粒子

　レプトン　e^-，μ^-，τ^-，ν_e，ν_μ，ν_τ およびその反粒子．

　クォーク　$q_r{}^\alpha$ およびその反粒子．　ここで α は R（赤），G（緑），B（青）の色を表し，r は u（アップ），d（ダウン），c（チャーム），s（ストレンジ），t（トップ），b（ボトム）などの香り（フレバー）を表す．

スピン 1 のゲージボーズ粒子

　$\gamma, W^\pm, Z, G_\beta{}^\alpha$ など．　ここでの α, β はクォークのときと同じ意味をもつ．

スピン 0 の Higgs（ヒッグス）ボーズ粒子

　ϕ^+, ϕ^0

ゲージボーズ粒子とか Higgs ボーズ粒子の意味はあとで明らかになる．フェルミ粒子とボーズ粒子ということについて何も知らない人は，あとがきの注意にしたがって最低の知識を得てほしい．

1つの粒子はその粒子の表す演算子 $\varphi(x)$ によって表される．ここで x はもちろん x^0, x^1, x^2, x^3 と時空の座標をもっている．したがって $\varphi(x)$ は x を1つ定めたときにヒルベルト空間の演算子を表すことになる．大抵の場合は $\varphi(x)$ のことを単に φ とかく．

いま物理系が1つ与えられたとき，その物理系の Lagrangian（ラグラジアン）密度 $\mathcal{L}$ というものが与えられる．$\mathcal{L}$ はその物理系に関係のある粒子の場の演算子を $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ とするとき $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$, $\partial_\mu\varphi_1,\cdots,\partial_\mu\varphi_n$ の多項式の形で表されるのが普通である．いま $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i(x),\ \partial_\mu\varphi_i(x))$$

とすれば，この物理系の Lagrangian $L(t)$ は

$$L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu\varphi_i(x))$$

の形で表される．ここで $\int d^3x$ は空間部分についての積分を意味する．

このとき運動の方程式は Hamilton（ハミルトン）の原理にしたがって

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(t)dt = 0$$

である．ここに t_1, t_2 は任意の時間であり，場の変分は t_1, t_2 のところでは0になるものとする．Hamilton の原理から Euler（オイラー）の方程式

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_i} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_i)}$$

がでてくる．ここに $\dfrac{\delta}{\delta\varphi_i}$ や $\dfrac{\delta}{\delta(\partial_\mu\varphi_i)}$ はそれぞれ φ_i や $\partial_\mu\varphi_i$ による形式的な偏微分と思ってよい．

以下においてフェルミ粒子の場はなるべく ψ によって表し，ボーズ粒子の場は φ によって表すことにする．ここでなるべくといったのは，フェルミ粒子ともボーズ粒子ともつかないときは φ を用いたりするからである．

さてフェルミ粒子（以下スピン $\dfrac{1}{2}$ のものだけを考える）ψ があるときに $\bar{\psi}$ を

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$$

によって定義する．以下に ψ と $\bar{\psi}$ とを独立な変数と考える（これは ψ がもともと4つの場をまとめて考えているものと思えば何んの不思議もない）．

いま質量 m のフェルミ粒子が1つだけあるときの Lagrangian 密度は次の式で与えられる：

$$\mathcal{L}=\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi)-(\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi)-m\bar{\psi}\psi$$

これに上の処法で運動の方程式を求めれば

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{\psi}}-\partial_{\mu}\Big(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu}\bar{\psi})}\Big)=\frac{i}{2}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-m\psi+\frac{i}{2}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi}-\partial_{\mu}\Big(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu}\psi)}\Big)=-\frac{i}{2}(\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}-m\bar{\psi}-\frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}$$

であるから結論として次の Dirac の方程式を得る：

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi=0,\qquad (i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}+m\bar{\psi})=0$$

この2つを次のようにかく

$$(i\gamma\cdot\overrightarrow{\partial}-m)\psi=0 \quad \text{または} \quad (i\overrightarrow{\not\partial}-m)\psi=0$$

$$\bar{\psi}(i\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}+m)=0 \quad \text{または} \quad \bar{\psi}(i\overleftarrow{\not\partial}+m)=0$$

ここで $\overleftarrow{\partial}$ は前の $\bar{\psi}$ を偏微分するという意味である．なぜこのようにかくかということは，ψ を4次元の縦ベクトル，γ^{μ} が4次元の行列，$\bar{\psi}$ が $\psi^{\dagger}\gamma_0$ であるから4次元の横ベクトル，したがって $\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}$ を $\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}$ とかくわけにはいかない．したがって $\bar{\psi}\psi$ の形はあり得るが $\psi\bar{\psi}$ はあり得ない．この感じを強調しているのが $\bar{\psi}(i\overleftarrow{\not\partial}+m)=0$ ということになる．

さてゲージ理論に入ることにする．ゲージ理論の出発点は弧状連結な線形リー群 G がまず与えられていて，G の元を物理的状態の作るヒルベルト空間に施す作用が定義されていることである．すなわち数学的にいえば，表現空間が物理的状態のなす（正確にいえば物理的状態を含む）ヒルベルト空間であるような無限次元の G のユニタリー表現が与えられているとする．したがって色々な素粒子の場の演算子についての G の作用も定義されている．

大切なことは，この G の作用によって Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が不変になるという前提である．

あとでの話の進行を容易にするために，まず G についていくつかの約束をする．

いま G のリー代数を $\mathcal{L}(G)$ で表すことにする．$\mathcal{L}(G)$ の生成元を iT^j $(j=1,\cdots,N)$ とする（このとき物理の方では T^j が G の生成元であるともいう）．

$T^1, \cdots, T^N$ の交換子積が次の関係をみたしているものとする：

$$[T^i, T^j] = ic_{ijk}T^k$$

ここでもちろん右辺の k については $1, \cdots, N$ についての和がとられているものとする．

もし $T^1, \cdots, T^N$ が Hermite にとれれば c_{ijk} は実数になっている．いまさらに次の式が成立しているように $T^1, \cdots, T^N$ はとられているものとする．

$$\mathrm{Tr}(T^iT^j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

これは G がコンパクト半単純リー群のときは一般にこのようにとれることが証明されるが，以下に見るように実際の場合にはこのようにとることは簡単なので一般的な証明はここでは省略する．たとえば $\mathfrak{su}(2)$ については $T^i = \frac{1}{2}\sigma^i$ とおけばよいし，$\mathfrak{su}(3)$ については $T^i = \frac{1}{2}\lambda^i$ とおけばよい．

このとき T^i の (s,t) 成分を $(T^i)_{st}$ とかけば

$$(T^i)_{st}(T^j)_{tu} - (T^j)_{st}(T^i)_{tu} = ic_{ijk}(T^k)_{su}$$

$$(T^i)_{st}(T^j)_{ts} = \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

となるから

$$(T^i)_{st}(T^j)_{tu}(T^l)_{us} - (T^j)_{st}(T^i)_{tu}(T^l)_{us}$$
$$= ic_{ijk}(T^k)_{su}(T^l)_{us} = ic_{ijk}\cdot\frac{1}{2}\delta_{kl} = \frac{i}{2}c_{ijl}$$

これから直ちに

$$c_{ijl} = -c_{ilj}$$

が得られる．さらに $c_{ijl} = -c_{jil}$ は明らかであるから，c_{ijk} は完全反対称であることがわかる．

いま，この c_{ijk} をもとにして

$$(T^i)_{jk} = -ic_{ijk}$$

で T^i を定義したとすれば

$$([T^i, T^j])_{su} = (T^i)_{st}(T^j)_{tu} - (T^j)_{st}(T^i)_{tu}$$
$$= -c_{ist}c_{jtu} + c_{jst}c_{itu} = c_{ist}c_{tju} + c_{iut}c_{tsj}$$
$$= -c_{ijt}c_{tus} = c_{ijk}c_{ksu} = ic_{ijk}(T^k)_{su}$$

となって

$$[T^i, T^j] = ic_{ijk}T^k$$

がでてくる．$\mathcal{L}(G)$ は c_{ijk} だけで定まるから，最初から次の式が成立しているものとす

る：

$$[T^i, T^j] = -(T^i)_{jk}T^k$$

いま $\beta^1, \cdots, \beta^N$ を N 個の実数として $\vec{\beta} = (\beta^1, \cdots, \beta^N)$ とすれば，G の単位元の近傍の元は

$$U_G(\vec{\beta}) = \exp\left(i \sum_{i=1}^{N} \beta^i T^i\right) = \exp(i\vec{\beta}\cdot\vec{T})$$

で表される．

いま ρ を $\mathcal{L}(G)$ の表現として，その次元を n とする．$\rho(T^i) = L^i$ とおけばもちろん

$$[L^i, L^j] = ic_{ijk}L^k$$

を満足する．

さて ρ の次元と同じ数だけの場 φ_a $(a = 1, \cdots, n)$ が与えられているものとする．ここに φ_a の場はフェルミ粒子の場でも，ボーズ粒子の場でもよいものとする．

いまこの φ_a は

$$[T^i, T^j] = -(T^i)_{jk}T^k$$

に似た次の変換をするものとする：

$$[T^i, \varphi_a(x)] = -L_{ab}{}^i\varphi_b(x)$$

ここで計算によく用いられる式を証明しておくことにする．

補題 1. 次の式が成立する：

$$\underbrace{[A, [A, \cdots, [A}_{n}, \varphi]\cdots]] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}A^k\varphi A^{n-k}$$

［証明］ $n = 1$ のときは，次の式になるから明らか：

$$[A, \varphi] = -\varphi A + A\varphi$$

n のときに成立したとすれば $n+1$ のときは次の計算で明らか：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}A^k\varphi A^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k}\binom{n}{k-1}A^k\varphi A^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}A^k\varphi A^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}A^{k+1}\varphi A^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}A^k\varphi A^{n+1-k} \\
&= \left[A,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}A^k\varphi A^{n-k}\right] \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

補題 2. 次の式が成立する：

$$\exp(iA)\varphi\exp(-iA)=\varphi+i[A,\varphi]+\cdots+\frac{i^n}{n!}\underbrace{[A,[A,\cdots,[A}_{n},\varphi]\cdots]]+\cdots$$

[証明] $\exp(itA)\varphi\exp(-itA)$ を t について Taylor (テイラー) 展開して $t=1$ として上の式を得ることにする．したがって次の計算で証明される：

$$\frac{d^n}{dt^n}(\exp(itA)\varphi\exp(-itA))\Big|_{t=0}$$

$$=\sum_k\binom{n}{k}\Big(\frac{d^k}{dt^k}\exp(itA)\Big)\varphi\Big(\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\exp(itA)\Big)\Big|_{t=0}$$

$$=\sum_k\binom{n}{k}(iA)^k\exp(itA)\varphi(-iA)^{n-k}\exp(-itA)\Big|_{t=0}$$

$$=\sum_k(-1)^{n-k}\binom{n}{k}i^nA^k\varphi A^{n-k} \qquad \blacksquare$$

この 2 つの補題を用いて G の元 $U_G(\vec{\beta})$ が $\varphi_a(x)$ に与える変換を考えることにする．$U_G(\vec{\beta})$ で $\varphi(x)$ を $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ の全体として

$$\varphi(x)\longrightarrow\varphi'(x)$$

という変換を受けるとすれば

$$\varphi'(x)=U_G(\vec{\beta})\varphi(x)U_G(\vec{\beta})^{-1}$$

$$=\varphi+i[\vec{\beta}\cdot\vec{T},\varphi]+\cdots+\frac{i^k}{k!}\underbrace{[\vec{\beta}\cdot\vec{T},[\cdots[\vec{\beta}\cdot}_{k}\vec{T},\varphi]\cdots]]+\cdots$$

となる．したがって無限小の $\vec{\beta}$ に対しては

$$\varphi_a(x)\quad\longrightarrow\quad\varphi_a-i(\vec{\beta}\cdot\vec{L})_{ab}\varphi_b+O(\beta^2)$$

となる．ここに $O(\beta^2)$ は 2 次の無限小である．したがって一般の場合は

$$\varphi_a(x)\quad\longrightarrow\quad\exp(-i\vec{\beta}\cdot\vec{L})_{ab}\varphi_b(x)=U(\vec{\beta})_{ab}\varphi_b(x)$$

となる．ここで $U(\vec{\beta})=\exp(-i\vec{\beta}\cdot\vec{L})$ と定義されている．

さて以下に考えられる Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ はこの G の変換に関して対称である．すなわち不変であるものとする．

たとえば n 個のフェルミ粒子の場 ψ_a $(a=1,\cdots,n)$ や m 個の複素スカラー場 φ_b $(b=1,\cdots,m)$ があったとする．ここにスカラー場というのはスピンがないというだけのことである．さらに n 次元のユニタリー表現 ρ (以下に G の表現と $\mathcal{L}(G)$ の表現とを同じ

文字で表すことにする）と m 次元のユニタリー表現 ρ' があったとして

$$L^i = \rho(T^i), \qquad L'^i = \rho'(T^i)$$

として ψ_a は L^i で変換し，φ_b は L'^i で変換するとして，比較的一般的な形の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が次の形で与えられているものとすれば $\mathcal{L}$ は G で対称になっている．

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_a i\partial\!\!\!/ \psi_a + (\partial_\mu \varphi_b)^\dagger \partial^\mu \varphi_b - V(\varphi) + \Gamma_{ab}{}^c \bar{\psi}_a \psi_b \varphi_c + \Gamma_{ab}{}^{c*} \varphi_c{}^\dagger \bar{\psi}_b \psi_a$$

ここで $V(\varphi)$ は $\varphi^\dagger\varphi = \varphi_b{}^\dagger \varphi_b$ の多項式である．最後の2項 $\Gamma_{ab}{}^c \bar{\psi}_a \psi_b \varphi_c + \Gamma_{ab}{}^{c*} \varphi_c{}^\dagger \bar{\psi}_b \psi_a$ は Yukawa 項といわれるもので ψ で表される場と φ で表される場との間の相互作用を表す項になっている．第 2 項 $\Gamma_{ab}{}^{c*} \varphi_c{}^\dagger \bar{\psi}_b \psi_a$ は $\Gamma_{ab}{}^c \bar{\psi}_a \psi_b \varphi_c$ の H.C. である（確かめよ）．したがってこの形はしばしば

$$\Gamma_{ab}{}^c \bar{\psi}_a \psi_b \varphi_c + \text{H.C.}$$

とかかれる．ここでもちろん $\Gamma_{ab}{}^c$ はスカラーであって，さらに G の変換によって $\Gamma_{ab}{}^c$ が Yukawa 項全体が不変になるように変換を受けるものとする．以下の我々の議論では Yukawa 項の影響はほとんどないので多くの場合 Yukawa 項は省略することにする．

上の形が G について対称すなわち不変であることは，たとえば $\varphi^\dagger\varphi$ をとれば

$$\begin{aligned}\varphi_b{}^\dagger \varphi_b \quad \longrightarrow \quad ((e^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}})_{bc}\varphi_c)^\dagger ((e^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}})_{bd}\varphi_d) &= \varphi_c{}^\dagger (e^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}})_{cb} (e^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}})_{bd}\varphi_d \\ &= \varphi_c{}^\dagger \delta_{cd} \varphi_d = \varphi_b{}^\dagger \varphi_b\end{aligned}$$

からわかる．ここで表現がユニタリーのことが用いられている．

この G について $\mathcal{L}$ が不変なことを，G の変換が x について無関係すなわち大域的 (global) に不変であることから global symmetry といわれる．

もっと詳しくいえば G の元 $U_G(\vec{\beta}) = \exp(i\vec{\beta}\cdot\vec{T})$ をとったとき $\vec{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_N)$ は x に無関係である．

この対称性のなかで典型的なものは G に電荷を表す元が存在するときである．もっと詳しくいえば $\mathcal{L}(G)$ のなかに iQ という元が入っていて，Q は Hermite で（正確には Q の表現が Hermite で）場 φ_a について

$$Q\varphi_a = q_a \varphi_a$$

という関係をみたしているものとする．ここで q_a は場 φ_a の電荷であるとする．

このとき $\mathcal{L}$ が G で対称であるという条件は $\mathcal{L}$ の中に

$$\varphi_{a_1} \cdots \varphi_{a_k} \qquad \text{または} \qquad \varphi_{a_1} \cdots \partial_\mu \varphi_{a_i} \cdots \varphi_{a_k}$$

のような項が入っていたときに

$$q_{a_1}+\cdots+q_{a_k}=0$$

がみたされていなければならないことを意味する．すなわちすべての項が，電荷の和が0となる項からできていることを意味する．

ゲージ理論というのは $U_G(\vec{\beta})$ の $\vec{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_N)$ を x についての関数 $\vec{\beta}(x)=(\beta_1(x),\cdots,\beta_N(x))$ にかえたときどうなるか？ということである．この場合 $\vec{\beta}(x)$ は x に依存するから，この形の変換について対称，すなわち不変であることを local symmetry という．

Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が G について global symmetry をみたしているからといって ocal symmetry をみたすことにはならない．これは上にかいた典型的な Lagrangian 密度の場合でいえば $V(\varphi)$ や Yukawa 項はよいのであるが，$\bar{\psi}_a i\partial\!\!\!/ \psi_a$ と $(\partial_\mu\varphi_b)^\dagger\partial^\mu\varphi_b$ では ∂_μ による偏微分があるため $\vec{\beta}(x)$ の微分 $\vec{\beta}'(x)$ が現れてきて対称性が破れてしまうためである．

このときの処法を一般の場合に考えることにする．

さてこれは Lagrangian 密度の構成要素の主なもの

$$\bar{\psi}_a i\partial\!\!\!/ \psi_a \qquad と \qquad (\partial_\mu\varphi_b)^\dagger\partial^\mu\varphi_b$$

の場合にやっておけばよいであろう．

いま一般に場 φ_a $(a=1,\cdots,n)$ があって，G の n 次元の表現 ρ が

$$\rho(T^i)=L^i$$

となっているとする．

このときゲージ理論の処法は，ゲージ場と呼ばれる新しい場 $A^1,\cdots,A^n$ を導入して，新しい Lagrangian 密度をいままでの Lagrangian 密度のなかの ∂_μ を

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu=\partial_\mu-ig\vec{A}_\mu\cdot\vec{L}$$

の形にかえることである．

ここで $A^1,\cdots,A^n$ は，変換が前の記号で $\varphi\longrightarrow U(\beta)\varphi$ となるときに次の条件をみたす変換 $\vec{A}_\mu\longrightarrow\vec{A}_\mu{}'$ を受けるものとする．ここに $U=U(\beta)$ とする：

$$\vec{A}_\mu\cdot\vec{L}\longrightarrow\vec{A}_\mu{}'\cdot\vec{L}=U\vec{A}_\mu\cdot LU^{-1}-\frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

このとき $D_\mu\varphi$ の変換は

$$\begin{aligned}D_\mu\varphi&=(\partial_\mu-ig\vec{A}_\mu\cdot\vec{L})\varphi\\&\longrightarrow U(\partial_\mu+U^{-1}\partial_\mu U-igA_\mu\cdot L-U^{-1}\partial_\mu U)\varphi=UD_\mu\varphi\end{aligned}$$

ここで　$\partial_\mu(U\varphi) = (\partial_\mu U)\varphi + U\partial_\mu\varphi$ が用いられている．

したがって $\varphi \longrightarrow U\varphi$, $\vec{A}_\mu\cdot\vec{L} \longrightarrow \vec{A}_\mu{}'\cdot\vec{L}$ となる変換をゲージ変換と呼べば，

$$\bar{\psi}iD_\psi\psi \quad \text{とか} \quad (D_\phi{}^\mu\varphi)^\dagger D_{\phi\mu}\varphi$$

の形はゲージ変換で不変であることがわかる．

ここで D_ψ とか D_ϕ とか分けたのは，ψ と ϕ とで G の表現も変るかもしれない．そのときには D_ψ に導入されるゲージ場 $A^1, \cdots, A^n$ と D_ϕ に導入されるゲージ場 $B^1, \cdots, B^m$ とは異なるものであるし（だいいち個数も違うのが普通である），そのときの

$$\partial_\mu - ig\vec{A}_\mu\cdot\vec{L} \qquad \partial_\mu - ig\vec{B}_\mu\cdot\vec{L}'$$

としたときの $\vec{L}, \vec{L}'$ が異なるのが普通だからである．

この一般論にしたがって色々な場合を考えることにする．まず最も簡単な場合として，1個の自由フェルミ粒子の場合を考える Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_0$ を

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$$

として，$G = U(1)$ であって G の元 $e^{i\beta}$ によって ψ の受ける変換を

$$\psi(x) \quad \longrightarrow \quad e^{-i\beta}\psi(x)$$

とすれば，もちろん global symmetry は成立している．ゲージ場 A_μ を導入して，ゲージの共変微分 D_μ を

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x)$$

と定義して，G の元 $e^{i\beta(x)}$ によって A_μ は

$$A_\mu(x) \quad \longrightarrow \quad A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta(x)$$

という変換を受ける．ここで $\vec{L} = 1$，$\partial_\mu e^{-i\beta(x)} = -ie^{-i\beta(x)}\partial_\mu\beta(x)$ を用いている．

これから $D_\mu\psi(x)$ の $e^{i\beta(x)}$ による変換は

$$D_\mu\psi(x) \quad \longrightarrow \quad e^{-i\beta(x)}D_\mu\psi(x)$$

となることがわかって，新しい Lagrangian 密度

$$\bar{\psi}(iD\!\!\!\!/ - m)\psi$$

がゲージ変換で不変であることがわかる．

しかし，この式が新しい Lagrangian 密度のすべてではない．A_μ という新しい場が付け加えられたのであるから A_μ の運動エネルギーを表す Lagrangian 密度の部分

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

ここに $F_{\mu\nu}$ は次のように定義される：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

いまこの $F_{\mu\nu}$ がゲージ変換で不変であることは

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu\Bigl(A_\nu - \frac{1}{g}\partial_\nu\beta(x)\Bigr) - \partial_\nu\Bigl(A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta(x)\Bigr) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

となるから明らかである．

いま付け加えられた場 A_μ が質量が 0 でないとすれば A_μ の質量を表す Lagrangian 密度の項

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu$$

を付け加えなければならないが，この項はゲージ変換で不変でないから，ゲージ理論の要請から A は質量 0 の粒子の場であることがわかる．全体として新しい Lagrangian 密度は次の形であることがわかる：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D}_\mu - m)\psi = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} + g\not{A} - m)\psi$$

ここでゲージ場 A_μ がゲージ理論によって自動的に得られるのがゲージ理論の長所である．この新しい場 A_μ は質量 0 であるから，その力は遠くにまで到達する．この現象は電磁場の場合はよいが，その他の場合にはそのままでは最終的な結果が得られないことを示している．

次に $G = U(1)$ で自由な複素スカラー場 φ が 1 個ある場合には，その Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_0$ を

$$\mathcal{L}_0 = (\partial^\mu\varphi)^\dagger\partial_\mu\varphi - \mu^2\varphi^\dagger\varphi$$

とおいて（μ は質量である），前と同じようにゲージ場 A_μ を導入して $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x)$ として $e^{i\beta(x)}$ なる元による変換をやはり

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta(x)$$

とおけば，新しい Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D^\mu\varphi)^\dagger(D_\mu\varphi) - \mu^2\varphi^\dagger\varphi \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + ((\partial^\mu + igA^\mu)\varphi^\dagger)(\partial_\mu - igA_\mu)\varphi - \mu^2\varphi^\dagger\varphi \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial^\mu\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi + ig(\varphi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varphi)A^\mu + g^2\varphi^\dagger\varphi A^2 - \mu^2\varphi^\dagger\varphi
\end{aligned}$$

ここに $f\overleftrightarrow{\partial}_\mu g$ の定義は次のものである：

$$f\overleftrightarrow{\partial}_\mu g = f(\partial_\mu g) - (\partial_\mu f)g$$

もちろん $F_{\mu\nu}$ は前と同じように定義するものである.

次にやはり $G = U(1)$ として，$\mathcal{L}(G)$ の生成元が iQ とする．ここに Q は電荷を表す演算子であるとする．このときいくつかのフェルミ粒子の場 ψ_a といくつかの複素スカラー場 φ_b とがあるとする．いま ψ_a の電荷を q_a, φ_b の電荷を q_b とすれば，ψ_a, φ_b へのゲージ変換は次の形となる：

$$\psi_a(x) \longrightarrow \exp(-iq_a\beta(x))\psi_a(x)$$
$$\varphi_b(x) \longrightarrow \exp(-iq_b\beta(x))\varphi_b(x)$$

これから得られる Lagrangian 密度の運動エネルギーを表す部分は

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_a \bar{\psi}_a(i\partial\!\!\!/ + q_a g A\!\!\!/)\psi_a$$
$$+ \sum_b ((\partial^\mu + iq_b g A^\mu)\varphi_b{}^\dagger)(\partial_\mu - iq_b g A_\mu)\varphi_b$$

となっている．全体の Lagrangian 密度は，これに Yukawa 項と次の ψ_a, φ_b の質量の項を付け加えればよい：

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\bar{\psi}_a m_{ab}\psi_b - \varphi_c{}^\dagger \mu_{cd}{}^2 \varphi_d$$

ただしこの項がゲージ変換で不変になっているものとする（ゲージ変換で不変でない項は係数を 0 として消えているものとする).

さてスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミ粒子はスピンが左巻きと右巻きとに分けることができる．これは式では次のように表される：

$$\psi_L = P_L\psi, \qquad \psi_R = P_R\psi$$
$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}, \qquad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}$$

ここに ψ_L がもちろん左巻きであって，ψ_R が右巻きである．P_L, P_R は射影演算子になっている．すなわち Hermite であって次の式を満足する：

$$P_L{}^2 = P_L, \qquad P_R{}^2 = P_R$$

しかも P_L と P_R は数学でよく用いられる単位の分解になっている．すなわち

$$P_L \cdot P_R = P_R \cdot P_L = 0, \qquad P_L + P_R = I$$

ψ_L と ψ_R とは独立の場であると考える.（もっと厳密にいえば，ψ の反粒子の場を ψ^C

とかくとき，$\psi_L,\psi_R,\psi_L{}^C,\psi_R{}^C$ のなかから (ψ_L,ψ_R)，$(\psi_L,\psi_L{}^C)$，$(\psi_R,\psi_R{}^C)$，$(\psi_R{}^C,\psi_L{}^C)$ のなかの1組を独立な場ととってよい．どの組をとっても，それ以外の場はその組の2つの場から表すことができる．)

いま上で定義されたゲージ変換を ψ_L,ψ_R についてかけば

$$\psi_L \longrightarrow \exp(-iq\beta(x))\psi_L$$

$$\psi_R \longrightarrow \exp(-iq\beta(x))\psi_R$$

となるが，ψ_L,ψ_R を独立な場と考えられるから，もっと一般のゲージ変換（G を $U(1)$ としての上で)

$$\psi_L \longrightarrow \exp(-iq_L\beta(x))\psi_L$$

$$\psi_R \longrightarrow \exp(-iq_R\beta(x))\psi_R$$

を考えることがある．このような L と R とによって異なる変換をするものを chiral 変換と呼ぶ．

ここで P_L,P_R,ψ_L,φ_R はあとで大いに活躍することになるから，ここでその準備として2，3の計算をしておくことにする．

まず $\bar{\psi}_L,\bar{\psi}_R$ を次の式で定義する：

$$\bar{\psi}_L=(\psi_L)^\dagger\gamma_0, \qquad \bar{\psi}_R=(\psi_R)^\dagger\gamma_0$$

まず γ_5 が Hermite なことと $\{\gamma_5,\gamma^\mu\}=0$ のことから P_L,P_R が Hermite であって

$$\gamma^\mu P_L=P_R\gamma^\mu, \qquad \gamma^\mu P_R=P_L\gamma^\mu$$

がでてくる．これから明らかに

$$\bar{\psi}_L=(\psi_L)^\dagger\gamma_0=(P_L\psi)^\dagger\gamma_0=\psi^\dagger P_L\gamma_0=\psi^\dagger\gamma_0P_R=\bar{\psi}P_R$$

がでる．同様にして

$$\bar{\psi}_R=\bar{\psi}P_L$$

がでてくる．これから明らかに

$$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L=\bar{\psi}P_R\gamma^\mu P_L\psi=\bar{\psi}P_R\gamma^\mu\psi=\bar{\psi}\gamma^\mu P_L\psi$$

がでてくる．同様にして

$$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R=\bar{\psi}P_L\gamma^\mu\psi=\bar{\psi}\gamma^\mu P_R\psi$$

がでてくる．

さらに $P_L+P_R=I$ を用いれば，次の式は明らかであろう：

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L+\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$$

さて chiral 変換の場合は ψ_L と ψ_R とを独立な場と考えているため D_μ を $D_\mu{}^L$ と $D_\mu{}^R$ とに分けて別々に定義しなければならない．すなわち次の式がでてくる：

$$D_\mu{}^L = \partial_\mu - igq_L A_\mu, \qquad D_\mu{}^R = \partial_\mu - igq_R A_\mu$$

となる．したがって新しく得られる Lagrangian 密度の ψ の運動エネルギーを表す項は次の形となる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}} &= \bar{\psi}_L i \not{D}^L \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{D}^R \psi_R = \bar{\psi}_L (i\not{\partial} + q_L g \not{A})\psi_L + \bar{\psi}_R (i\not{\partial} + q_R g \not{A})\psi_R \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} + g\not{A}(q_L P_L + q_R P_R))\psi\end{aligned}$$

このあたりで $G = U(1)$ の場合は卒業することにして，一般の G の場合を考えることにする．状況を再現すれば，n 個の場 φ_a $(a = 1, \cdots, n)$ があって，G の n 次元の表現を ρ として，$\mathcal{L}(G)$ の生成元 T^i に対して $\rho(T^i) = L^i$ として，T^i, L^i, c_{ijk} についてはすべて前にのべた条件がみたされているものとする．さらに G の元 $U_G(\vec{\beta}) = \exp(i\vec{\beta}\cdot\vec{T})$ によって，φ は

$$\varphi \longrightarrow U(\vec{\beta})\varphi, \qquad U(\vec{\beta}) = \exp(-i\vec{\beta}\cdot\vec{L})$$

と変換を受け，新しい Lagrangian 密度の主な部分は

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig\vec{A}_\mu\cdot\vec{L}$$

なる変換によって得られる．ここに A_μ は新しく導入されたゲージ場であって次の条件をみたす変換 $\vec{A}_\mu \longrightarrow \vec{A}_\mu{}'$ を受けるものとする：

$$\vec{A}_\mu\cdot\vec{L} \longrightarrow \vec{A}_\mu{}'\cdot\vec{L} = U\vec{A}_\mu\cdot L U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

ここに $U = U(\vec{\beta})$ である．

いまこの最後の条件は $\vec{A}_\mu{}'$ がどのようなものかをハッキリ表していないので，ここでまず $\vec{A}_\mu{}'$ の具体的な形を求めることにする．

以前の約束 $[L^i, L^j] = ic_{ijk}L^k$ を記憶にとめて，$\vec{\beta}(x)$ を無限小とすれば

$$\begin{aligned}\vec{A}_\mu\cdot\vec{L} &\longrightarrow (1 - i\vec{\beta}(x)\cdot\vec{L})\vec{A}_\mu\cdot\vec{L}(1 + i\vec{\beta}(x)\cdot\vec{L}) - \frac{i}{g}(-i\partial_\mu\vec{\beta}\cdot\vec{L})(1 + i\vec{\beta}(x)\cdot\vec{L}) \\ &= \vec{A}_\mu\cdot\vec{L} - i\beta^i A_\mu{}^j (L^i L^j - L^j L^i) - \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\beta}\cdot\vec{L} \\ &= \vec{A}_\mu\cdot\vec{L} + \beta^i A_\mu{}^j L^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\beta}\cdot\vec{L}\end{aligned}$$

ここに c_{ijk} が完全反対称であることを用いれば，この変換は次のものであることがわかる：

$$A_\mu{}^i \longrightarrow A_\mu{}^i + \beta^j A_\mu{}^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu \beta^i$$

(この計算のなかでは $\vec{\beta}$ が無限小なだけではなくて $\partial_\mu\vec{\beta}$ も無限小であることが仮定されている．もちろん $\vec{\beta}$ が $\varepsilon\vec{\theta}$ のような形ならばこれはみたされる．)

さてこの一般の場合に新しい Lagrangian を得るためには，新しく導入されたゲージ場 A_μ の運動エネルギーを表す次の項を付け加えなければならない：

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = -\frac{1}{4}F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

ここに $F^i{}_{\mu\nu}$ は次の形である：

$$F^i{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu{}^i - \partial_\nu A_\mu{}^i + g c_{ijk} A_\mu{}^j A_\nu{}^k$$

いま $\mathcal{L}_{\rm kin}$ がゲージ変換で不変であることを証明しよう．このためある量 $*$ があったとき，ゲージ変換を受けてできた量を $*'$ として $\delta* = *' - *$ とかくことにしよう．上の $A_\mu{}^{i\prime}$ の計算をこの形でかけば次の形になる：

$$\delta A_\mu{}^i = \beta^j A_\mu{}^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu \beta^i$$

ここでまず $\delta F^i{}_{\mu\nu}$ を計算するために次を計算する：

$$\begin{aligned} c_{ijk}\delta(A_\mu{}^j A_\nu{}^k) &= c_{ijk}(\delta A_\mu{}^j)A_\nu{}^k + c_{ijk}A_\mu{}^j \delta A_\nu{}^k \\ &= c_{ijk}\beta^l A_\mu{}^m c_{jlm} A_\nu{}^k + c_{ijk}A_\mu{}^j \beta^l A_\nu{}^m c_{klm} \\ &\quad - \frac{c_{ijk}}{g}((\partial_\mu\beta^j)A_\nu{}^k + (\partial_\nu\beta^k)A_\mu{}^j) \end{aligned}$$

さらに $\delta(\partial_\mu A_\nu{}^i - \partial_\nu A_\mu{}^i)$ を計算すれば

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu A_\nu{}^i - \partial_\nu A_\mu{}^i) &= \partial_\mu(\delta A_\nu{}^i) - \partial_\nu(\delta A_\mu{}^i) \\ &= c_{ijk}\beta^j(\partial_\mu A_\nu{}^k - \partial_\nu A_\mu{}^k) + c_{ijk}((\partial_\mu\beta^j)A_\nu{}^k - (\partial_\nu\beta^j)A_\mu{}^k) \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} c_{ijk}c_{jlm}A_\mu{}^m A_\nu{}^k + c_{ijk}c_{klm}A_\mu{}^j A_\nu{}^m &= A_\mu{}^j A_\nu{}^m (c_{ikm}c_{klj} + c_{ijk}c_{klm}) \\ &= A_\mu{}^j A_\nu{}^m (c_{imk}c_{kjl} + c_{ijk}c_{klm}) \\ &= -c_{ilk}c_{kmj}A_\mu{}^j A_\nu{}^m \\ &= c_{ilk}c_{kjm}A_\mu{}^j A_\nu{}^m \end{aligned}$$

となるから c_{ijk} の完全反対称を用いれば

$$\delta F^i{}_{\mu\nu} = c_{ijk}\beta^j F^k{}_{\mu\nu}$$

が得られる．これから $F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$ がゲージ不変であることは次のように c_{ijk} の完全反対称

を用いて得られる：

$$\begin{aligned} F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad & (F^i{}_{\mu\nu} + c_{ijk}\beta^j F^k{}_{\mu\nu})(F^{i\mu\nu} + c_{ijk}\beta^j F^{k\mu\nu}) \\ & = F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + c_{ijk}\beta^j (F^i{}_{\mu\nu}F^{k\mu\nu} + F^k{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}) \\ & = F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} \qquad (c_{ijk} + c_{ikj} = 0 \text{ だから}) \end{aligned}$$

これでゲージ場の運動エネルギーを表す Lagrangian 密度の項がゲージ不変であることがわかったが，これに反してゲージ場の粒子の質量の項

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{1}{2} M_{ij}{}^2 A^{i\mu} A_\mu{}^j$$

はゲージ不変にならない．したがってゲージ不変を保つためにはゲージボーズ粒子は質量が 0 でなければならない．したがってゲージ粒子の力は遠達力であることになる．これは電磁場には都合がよいが，強い相互作用や弱い相互作用は遠達力ではないのでこのままでは具合が悪い．これを補正するのがあとで議論する Higgs（ヒッグス）モデルである．Higgs モデルに入る前にゲージ場の導入の一般論をもう少し続けることにする．

もしフェルミ粒子の場が n 個 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ あり，また複素スカラー場が m 個 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ あるとして n 次元の表現 ρ_ψ と m 次元の表現 ρ_φ があるときは，

$$L_\psi{}^i = \rho_\psi(T^i), \qquad L_\varphi{}^i = \rho_\varphi(T^i)$$

と定義し，ψ, φ についてのゲージ変換は

$$\begin{aligned} \psi_a \quad & \longrightarrow \quad (\exp(-i\vec{\beta}\cdot L_\psi))_{ab}\psi_b = U_\psi(\vec{\beta})_{ab}\psi_b \\ \varphi_a \quad & \longrightarrow \quad (\exp(-i\vec{\beta}\cdot L_\varphi))_{ab}\varphi_b = U_\varphi(\vec{\beta})_{ab}\varphi_b \end{aligned}$$

の形となる．したがってそれによって導入される $A_{\psi\mu}, A_{\varphi\mu}, D_{\psi\mu}, D_{\varphi\mu}$ などとすべて φ と ψ とを別々にやることになる．

さらに ψ についての変換が chiral 変換のときは

$$L_\psi{}^i = L_L{}^i P_L + L_R{}^i P_R$$

とすればよい．

このように φ と ψ とを分けたときのフェルミ粒子の場と複素スカラー場の運動エネルギーを表す Lagrangian 密度の項は

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \bar{\psi} i D_\psi \psi + (D_\varphi{}^\mu \varphi)^\dagger D_{\varphi\mu}\varphi$$

となっていて，もちろんゲージ不変である．

スカラー場 φ_b が $\varphi_b = \varphi_b{}^\dagger$ をみたすとき，φ_b を Hermite スカラー場という．複素ス

カラー場 φ は常に

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_R+i\varphi_I)$$

で φ_R と φ_I が Hermite スカラー場であるように分解することができる. Hermite スカラー場の方が便利なことが多い.

Hermite スカラー場の場合の運動エネルギーを表す Lagrangian 密度の項は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_b)(\partial^\mu\varphi_b)$$

であり, したがってゲージ場を入れてからの運動エネルギーを表す Lagrangian 密度の項は次のものになる：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}}=\frac{1}{2}(D^\mu\varphi_b)(D_\mu\varphi_b)$$

φ が Hermite スカラー場のときは, ゲージ変換に用いる G の表現 ρ, $L^i=\rho(T^i)$ について, L^i は常に Hermite であって実表現, したがって ${}^tL^i=-L^i$ を常に仮定することにする.

§25. Higgs モデル

ゲージ理論で導入されたベクトル場 A_μ は前にのべたように質量 0 のスピン 1 のボーズ粒子の場である. ところで多くの場合必要なのは質量のあるボーズ粒子である. ゲージ不変性をみたしながら, 質量 0 のベクトル場 A_μ のいくつかをスピン 0 の質量のあるボーズ粒子の場にかえる方法を Higgs モデルという. Higgs モデルでできたスピン 0 の粒子を Higgs ボーズ粒子という.

いま n 個の Hermite スカラー場 φ_a $(a=1,\cdots,n)$ と m 個のフェルミ粒子の場 ψ_a $(a=1,\cdots,m)$ があって

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix},\qquad \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_m\end{pmatrix}$$

と縦ベクトルを用いてかくことにする. ゲージ理論によってできたゲージ不変な Lagrangian 密度の一般的な形として次のものをとる. ただし Yukawa 項は除いてある：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}+\bar{\psi}(i\not{D}-m_0)\psi+\frac{1}{2}(D^\mu\varphi)(D_\mu\varphi)-V(\varphi)$$

ここにフェルミ粒子の質量を表す行列 m_0 は

$$m_0 = m_{0L}P_L + m_{0R}P_R$$

である．ポテンシャル $V(\varphi)$ はくりこみ可能という条件から φ について高々4次の多項式であるとする．もちろん m_0 は $\bar{\psi}m_0\psi$ が global symmetry をみたすようになっているものとする．

いま $|0\rangle$ を真空を表す状態とする．φ の真空期待値 v は次の形となる：

$$v = \langle 0|\varphi|0\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

v_a のなかには0のものも0でないものもあり得る．$V(\varphi)$ は $\varphi = v$ のとき最小になっている．したがって

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi_a}\right|_{\varphi=v} = 0 \qquad (a = 1, \cdots, n)$$

が成立する．いま n 個の場 $\hat{\varphi}_a$ を次のように定義する：

$$\hat{\varphi}_a = \varphi_a - v_a$$

このとき $\hat{\varphi}_a$ の真空期待値はもちろん0となる．$V(\varphi)$ を $\hat{\varphi}$ で表せば，そのなかに $\hat{\varphi}$ の質量を表す項

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{\mu_{ab}{}^2}{2}\hat{\varphi}_a\hat{\varphi}_b$$

が入ってくる．ここに $\mu_{ab}{}^2$ は次の形になる：

$$\mu_{ab}{}^2 = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b}\right|_{\varphi=v}$$

いま無限小の $\vec{\beta}$ をとって（これは $\vec{\beta}(x)$ の略ではなくて x に依存しない定数の $\vec{\beta}$ とする．）$\exp(i\vec{\beta}\cdot\vec{T})$ による $V(\varphi)$ の変化を

$$V(\varphi) \quad \longrightarrow \quad V(\varphi) + \delta V(\varphi)$$

とかけば $\delta V(\varphi)$ は次の形となる：

$$\delta V(\varphi) = \frac{\partial V}{\partial \varphi_a}\delta\varphi_a = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_a}\vec{\beta}\cdot\vec{L}_{ab}\varphi_b$$

したがってゲージ不変性から $\delta V = 0$ すなわち次の式がでる：

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_a}L_{ab}{}^i\varphi_b = 0 \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

この式を φ_b で微分して $\varphi = v$ とすれば $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_a}$ は消えてなくなるから次の式を得る：

$$\mu_{ab}{}^2(L^i v)_b = 0 \qquad (i = 1, \cdots, N) \qquad (1)$$

必要ならば i の番号を付け換えて次のようにできる：

$$L^i v = 0 \qquad (i = 1, \cdots, M) \tag{2}$$

$$L^i v \neq 0 \qquad (i = M+1, \cdots, N) \tag{3}$$

いま G' を $\exp(iT^1), \cdots, \exp(iT^M)$ から生成される G の線形リー部分群とすれば，G' は $|0\rangle$ を不変にする．すなわち

$$T^i|0\rangle = 0 \qquad (i = 1, \cdots, M)$$

$$T^i|0\rangle \neq 0 \qquad (i = M+1, \cdots, N)$$

もし global symmetry だけを考えるならば，ここで上の（1），（2），（3）の式は質量を表す行列 $\mu_{ab}{}^2$ が $N-M$ 個の固有ベクトル，$L^i v$ $(i = M+1, \cdots, N)$ をもって，その固有値が 0 であることを意味している．すなわち質量 0 でスピンが 0 のボーズ粒子が $N-M$ 個存在することになる．これを Nambu（南部）–Goldstone（ゴールドストン）の定理といってこの粒子は Nambu–Goldstone ボーズ粒子と呼ばれる．しかしゲージ変換（local symmetry）のおかげで Nambu–Goldstone ボーズ粒子の代りに $p = n - (N-M)$ 個の質量のあるスピン 0 の Higgs 粒子が現れることになる．このためには p 個の Higgs 粒子の場を表す演算子 $\eta_1, \cdots, \eta_p$ と $N-M$ 個の関数 $\xi^i(x)$ $(i = M+1, \cdots, N)$ を導入して φ を次のように ξ と η で表すことにする．実は ξ^i は Nambu–Goldstone の場に相当するものであるが，ここでは単に $\xi^i(x)$ という関数として考える．以上の状況で $N-M>0$ のときを自発的対称性の破れが起きたという：

$$\varphi = \exp\Big(i \sum_{i=M+1}^{N} \xi^i L^i\Big) \begin{pmatrix} v_1 + \eta_1 \\ v_2 + \eta_2 \\ \vdots \\ v_p + \eta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \exp(i \textstyle\sum \xi^i L^i)(v + \eta)$$

いま次のゲージ変換を考える：

$$U(\xi) = \exp\Big(-i \sum_{i=M+1}^{N} \xi^i L^i\Big)$$

φ に $U(\xi)$ を施して得られる φ' は

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = U\varphi = v + \eta = \begin{pmatrix} v_1 + \eta_1 \\ \vdots \\ v_p + \eta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となっている．この φ' は p 個のスピン 0 の粒子を表す．また同じ変換によって $A_\mu{}^i$ は

$$A_\mu{}^i \longrightarrow A_\mu{}^{i\prime} = A_\mu{}^i - \frac{1}{g}\partial_\mu \xi^i + O(\xi^i) \qquad (i = M+1, \cdots, N)$$

となる．

いまこうしてできた φ' と $A_\mu{}^{i\prime}$ $(i = M+1, \cdots, N)$ および $A_\mu{}^1, \cdots, A_\mu{}^M$ を新しい場と考える．このときもっと詳しくいえば $A_\mu{}^{i\prime}\,(i = 1, \cdots, N)$ を i が $M+1, \cdots, N$ のときには上で定義した $A_\mu{}^{i\prime}$ であり，$i = 1, \cdots, N$ のときは $A_\mu{}^i$ のことであるとする．

このとき，この変換の形はゲージ変換の形であり，$\mathcal{L}$ はゲージ不変であるから

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^i{}_{\mu\nu}{}'F^{i\mu\nu\prime} + \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi - V(v+\eta)$$
$$+ \frac{1}{2}{}^t(v+\eta)(\overleftarrow{\partial^\mu} + ig\overrightarrow{A^{\mu\prime}}\cdot\overrightarrow{L})(\overrightarrow{\partial_\mu} - ig\overrightarrow{A_\mu}\cdot\overrightarrow{L})(v+\eta)$$

となっている．ここに $F_{\mu\nu}{}'$ は A_μ の代りに $A_\mu{}'$ を用いてできたものであり，${}^t(v+\eta)$ は $v+\eta$ を横ベクトルの形にかいたものである．

この $\mathcal{L}$ は新しい場 $A_\mu{}'$ と η ともともとの ψ の場の Lagrangian 密度になっている（ξ は消えてしまっている）．

いま新しい場 $A_\mu{}'$ について $A_\mu{}^{i\prime}\,(i = M+1, \cdots, N)$ は質量のある場であることを証明する（$A_\mu{}^{1\prime}, \cdots, A_\mu{}^{M\prime}$ はもちろん $A_\mu{}^1, \cdots, A_\mu{}^M$ と同じだから質量は 0 である．）．

$$\frac{1}{2}{}^t(v+\eta)(\overleftarrow{\partial^\mu} + ig\overrightarrow{A^{\mu\prime}}\cdot\overrightarrow{L})(\overrightarrow{\partial_\mu} - ig\overrightarrow{A_\mu}\cdot\overrightarrow{L})(v+\eta)$$

のなかの $A_\mu{}^{i\prime}, A_\nu{}^{j\prime}$ についての 2 次の項が $A_\mu{}^{i\prime}$ の質量を表すからそれを $\frac{1}{2}M_{ij}{}^2 A^{\mu i} A_\mu{}^j$ とおけば

$$M_{ij}{}^2 = M_{ji}{}^2 = g^2\,{}^t v L^i L^j v = g^2\langle v | L^i L^j v\rangle = g^2\langle L^i v | L^j v\rangle$$

となっている．ここに $\langle x|y\rangle = x_a{}^* y_a$ と定義する．この形が $L^i v = 0$ $(i = 1, \cdots, M)$, $L^i v \neq 0$ $(i = M+1, \cdots, N)$ から 0 の固有値を M 個もち，0 でない固有値を $N-M$ 個もつことは明らかであろう．

すなわち Higgs モデルではフェルミ粒子の他に M 個の質量のないゲージ粒子，$N-M$ 個の質量のあるゲージ粒子と $p=n-(N-M)$ 個の Higgs 粒子からできていることになる．

§26. Glashow-Weinberg-Salam モデル

ここでは電磁作用と強い相互作用とを統合した，Glashow (グラション)，Weinberg (ワインバーグ)，Salam (サラム) のモデルについてのべよう．

本論に入る前に 2，3 の準備をしておきたい．まず今後考えるフェルミ粒子は次のものとその反粒子である：

レプトン	e^-, μ^-, τ^-, ν_e, ν_μ, ν_τ
クォーク	u, d, c, s, t, b

いましばらくクォークの色は無視することにする．以上のものを第1世代，第2世代，第3世代に分けて次のように分類する：

第1世代	e^-	ν_e	d	u
第2世代	μ^-	ν_μ	s	c
第3世代	τ^-	ν_τ	b	t
電　荷	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$

大体の感じをいうと，物理法則を第1世代について表現すれば，同じ法則が第2世代，第3世代に通用するものとする．たとえば1つの法則

$$\Phi(e^-, \nu_e, d, u)$$

があったとすれば，e^- を e^- に対応する μ^-，ν_e を ν_e に対応する ν_μ，d をそれに対応する s，u をそれに対応する c にかえて第2世代の法則

$$\Phi(\mu^-, \nu_\mu, s, c)$$

が得られる．これは第3世代についても同じことである．もちろんこれは大体の感じであって，たとえば質量は第1世代，第2世代，第3世代でそれぞれ対応する質量が異なってくるから上のいいかえが無条件に成立するわけではない．ただ Lagrangian にでてくる第1世代，第2世代，第3世代での形が同じ形になっているということである．

したがって以下では第1世代についてのみ理論をのべることにする．したがって以下の理論では第1世代と第2世代（または第3世代）との間の直接な相互作用はなく，第1世

代と第2世代との間の相互作用はグルーオンなどを通して間接に行われることになる.

実は物理的には，第1世代と第2世代との間の相互作用を表した Cabibbo（カビボ）角というものがある．さらにそれを一般にした Kobayashi–Maskawa の行列というのがあるが，ここでは省略する.

本題に戻って以下では主に第1世代についてのべることにする.

以下では e^-, ν_e, d, u によってその場の演算子を表すことにする．すなわちいままで ψ_a とかいたところを e^-, ν_e, d, u とかくわけである.

この状況で我々の理論で電磁作用だけを考えた場合をのべてみれば，前節の $G = U(1)$ で $\mathcal{L}(G)$ の生成元が iQ で Q が電荷を表す演算子の場合になっている．したがって上の図にみるように e^-, ν_e, d, u の電荷はそれぞれ -1，0，$-\frac{1}{3}$，$+\frac{2}{3}$ であるから

$$Qe^- = -e^-, \qquad Q\nu_e = 0, \qquad Qd = -\frac{1}{3}d, \qquad Qu = \frac{2}{3}u$$

となっている．このとき導入されたゲージ場 A_μ は電磁場であり，ゲージ変換は

$$\begin{aligned}
A_\mu &\longrightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \beta(x) \\
e^- &\longrightarrow e^{i\beta(x)} e^- \\
\nu_e &\longrightarrow \nu_e \\
u &\longrightarrow e^{-\frac{2}{3}i\beta(x)} u \\
d &\longrightarrow e^{+\frac{1}{3}i\beta(x)} d
\end{aligned}$$

で Lagrangian 密度は次の形となる：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi$$

ここに ψ は e^-, ν_e, u, d の縦ベクトルである（本当は第2世代，第3世代も入れるべきである）．ここで D は次の形である：

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x)$$

ここでは自発的対称性の破れはないので電磁場 A_μ は質量0でスピン1のボーズ粒子の場になっている.

本論に入る前にここで P パリティと C 荷電共役変換についてのべておこう.

いま場の演算子を $\psi(\vec{x}, t)$ と表す．ここに $\vec{x}$ は空間座標である．このとき P は次の変換を意味する：

$$\psi(\vec{x},t) \underset{P}{\longrightarrow} \gamma_0\psi(-\vec{x},t)$$

いま $\psi_L = P_L\psi$, $\psi_R = P_R\psi$ を思いだして，ψ_L, ψ_R が P でどんな変換を受けるかをみれば

$$\psi_L(\vec{x},t) \underset{P}{\longrightarrow} P_L\gamma_0\psi(-\vec{x},t) = \gamma_0 P_R\psi(-\vec{x},t) = \gamma_0\psi_R(-\vec{x},t)$$

となることがわかる．同様にして次の変換がわかる：

$$\psi_R(\vec{x},t) \underset{P}{\longrightarrow} \gamma_0\psi_L(-\vec{x},t)$$

次に $\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R$ の定義を

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger\gamma_0, \qquad \bar{\psi}_R = (\psi_R)^\dagger\gamma_0$$

として $\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R$ が P でどんな変換を受けるかみれば

$$\bar{\psi}_L(\vec{x},t) \underset{P}{\longrightarrow} (\gamma_0\psi_R(-\vec{x},t))^\dagger\gamma_0 = \psi_R{}^\dagger(-\vec{x},t)\gamma_0\gamma_0 = \bar{\psi}_R(-\vec{x},t)\gamma_0$$

となる．同様にして次のことがわかる：

$$\bar{\psi}_R(\vec{x},t) \underset{P}{\longrightarrow} \bar{\psi}_L(-\vec{x},t)\gamma_0$$

このことから次の変換が起きることがわかる：

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{1L}(\vec{x},t)\gamma_\mu\psi_{2L}(\vec{x},t) \underset{P}{\longrightarrow}\ & \bar{\psi}_{1R}(-\vec{x},t)\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0\psi_{2R}(-\vec{x},t)\\ =\ & \bar{\psi}_{1R}(-\vec{x},t)\gamma^\mu\psi_{2R}(-\vec{x},t)\end{aligned}$$

ここで少なくとも左巻きが右巻きに変わっている．ところで将来でてくる Lagrangian 密度は L と R について対称ではないので，弱い相互作用がパリティを保存しないことがわかる．

次に荷電共役変換 C を考えることにする．C で $\psi, \bar{\psi}, \psi_L, \psi_R, \bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R$ からできるものをそれぞれ $\psi^C, \bar{\psi}^C, \psi_L{}^C, \psi_R{}^C, \bar{\psi}_L{}^C, \bar{\psi}_R{}^C$ とかくことにする．ψ^C は ψ の反粒子を表しており，ψ^C は（ψ で表される粒子の）反粒子を消滅させる，または（ψ で表される）粒子を生成する演算子である．$\psi_L{}^C$ は左巻きの反粒子を消滅させる，または右巻きの粒子（ψ で表される粒子）を生成する演算子である．同様に $\psi_R{}^C$ は右巻きの反粒子を消滅させる，または左巻きの粒子を生成する演算子になっている．

ここで荷電共役変換 C を次のように定義する：

$$\psi \underset{C}{\longrightarrow} \psi^C = C\bar{\psi}^T$$
$$\bar{\psi} \underset{C}{\longrightarrow} \bar{\psi}^C = \overline{(\psi^C)}$$

ここで矢印の右側に現れる C は，この章の初めにのべた荷電共役演算子 C であって，(4×4) 型の行列である．

まず $\bar{\psi}^C$ の具体的な形を求めれば次のようになる：

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C &= \overline{(\psi^C)} = \overline{(C\bar{\psi}^T)} = (C\bar{\psi}^T)^\dagger\gamma_0 = (\bar{\psi}^T)^\dagger C^\dagger\gamma_0 \\ &= ((\psi^\dagger)\gamma_0)^{T\dagger}C^\dagger\gamma_0 = \psi^T\gamma_0{}^T C^\dagger\gamma_0 \\ &= -\psi^T C^{-1}\gamma_0 CC^\dagger\gamma_0 \qquad (-\gamma_\mu{}^T = C^{-1}\gamma_\mu C \text{ を用いた}) \\ &= -\psi^T C^{-1}\gamma_0\gamma_0 \qquad (CC^\dagger = I \text{ を用いた}) \\ &= -\psi^T C^{-1}\end{aligned}$$

したがって次の式が得られた：

$$\bar{\psi} \xrightarrow[C]{} \bar{\psi}^C = -\psi^T C^{-1}$$

次に $\psi_L{}^C, \psi_R{}^C, \bar{\psi}_L{}^C, \bar{\psi}_R{}^C$ を調べることにする.

$$\begin{aligned}\psi_L \xrightarrow[C]{} \psi_L{}^C &= P_L\psi^C = P_L C\bar{\psi}^T = CP_L{}^T\bar{\psi}^T \qquad (C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5{}^T \text{ を用いた}) \\ &= C(\bar{\psi}P_L)^T = C\bar{\psi}_R{}^T \qquad (\bar{\psi}_R = \bar{\psi}P_L \text{ を用いた})\end{aligned}$$

したがって

$$\psi_L \xrightarrow[C]{} \psi_L{}^C = C\bar{\psi}_R{}^T$$

がわかった. 同様にして次の式が得られる：

$$\psi_R \xrightarrow[C]{} \psi_R{}^C = C\bar{\psi}_L{}^T$$

次に $\bar{\psi}_L{}^C, \bar{\psi}_R{}^C$ を求めれば

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L \xrightarrow[C]{} \bar{\psi}_L{}^C &= (P_L\psi^C)^\dagger\gamma_0 = (C\bar{\psi}^T)^\dagger P_L\gamma_0 = \bar{\psi}^{T\dagger}C^\dagger P_L\gamma_0 \\ &= \psi^T\gamma_0{}^T C^\dagger P_L\gamma_0 = -\psi^T C^{-1}\gamma_0 CC^\dagger P_L\gamma_0 \\ &= -\psi^T C^{-1}\gamma_0 P_L\gamma_0 \qquad (CC^\dagger = I \text{ を用いた}) \\ &= -\psi^T C^{-1}P_R\gamma_0\gamma_0 = -\psi^T P_R{}^T C^{-1} \qquad (C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5{}^T \text{ を用いた}) \\ &= -\psi_R{}^T C^{-1}\end{aligned}$$

$\bar{\psi}_R{}^C$ についても同様にすればよい. 結果をまとめてかけば次のようになる：

$$\bar{\psi}_L \xrightarrow[C]{} \bar{\psi}_L{}^C = -\psi_R{}^T C^{-1}$$

$$\bar{\psi}_R \xrightarrow[C]{} \bar{\psi}_R{}^C = -\psi_L{}^T C^{-1}$$

一般に $(\psi^C)^C = \psi$ となる. これは次の計算でわかる.

$$\begin{aligned}(\psi^C)^C &= C\bar{\psi}^{CT} \\ &= -C(\psi^T C^{-1})^T \qquad (\bar{\psi}^C = -\psi^T C^{-1} \text{ を用いた}) \\ &= -C(C^{-1})^T\psi = \psi \qquad (C^T = -C \text{ と } C^2 = -I \text{ を用いた})\end{aligned}$$

これと上の式とを用いると次の式がでる：

$$\psi_L = C\bar{\psi}_R{}^{CT}, \qquad \psi_R = C\bar{\psi}_L{}^{CT}$$

$$\bar{\psi}_L = -\psi_R{}^{CT}C^{-1}, \qquad \bar{\psi}_R = -\psi_R{}^{CT}C^{-1}$$

以下には ψ_L と ψ_R とを基本的な場として他のものをこの2つで表されると考える．もちろん上の式から $(\psi_L, \psi_L{}^C)$，$(\psi_R, \psi_R{}^C)$，$(\psi_R{}^C, \psi_L{}^C)$ のどれかを基本的な場と考えて，他のものをそれから表されると考えてもよい．

さて次に一般的な注意をする．A, B を 4×4 型の行列とする．このとき普通は

$$(AB)^T = B^T A^T$$

が成立する．ここで普通はといったのは A の成分 a_{ij} と B の成分 b_{kl} の間に交換可能条件

$$a_{ij}b_{kl} = b_{kl}a_{ij}$$

がみたされている場合である．

いまもし A の成分と B の成分の間に反対称な交換関係

$$a_{ij}b_{kl} = -b_{kl}a_{ij}$$

がみたされていたとすれば，上の式は次のように改めなければならない：

$$(AB)^T = -B^T A^T$$

たとえば A, B の成分がフェルミ粒子の場の演算子の場合は反対称となるから，この－のついた式にしなければならない．いままでの計算では常に $(AB)^T = B^T A^T$ としてきたが，これは A と B との一方がスカラーの行列であったことによる．

この注意の上で $\bar{\psi}_{1L}\gamma_\mu\psi_{2L}$ の荷電共役が何になるかを調べれば

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{1L}\gamma_\mu\psi_{2L} \underset{C}{\longrightarrow} \bar{\psi}_{1L}{}^C\gamma_\mu\psi_{2L}{}^C &= -\psi_{1R}{}^T C^{-1}\gamma_\mu C\bar{\psi}_{2R}{}^T \\ &= \psi_{1R}{}^T\gamma_\mu{}^T\bar{\psi}_{2R}{}^T = -\bar{\psi}_{2R}\gamma_\mu\psi_{1R}\end{aligned}$$

となる．ここで最後のところで－がついたのは上で説明したことと同じ理由である．γ_μ の成分はスカラーであるから考慮には入らない．また最後の式から T が落ちているのは 1×1 型の行列であるから T はとってもよいのである．

これを用いれば，たとえば次の2つの式

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_{eR}{}^C\gamma_\mu e_R{}^C &\underset{C}{\longrightarrow} \bar{\nu}_{eR}\gamma_\mu e_R \\ \bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} &\underset{C}{\longrightarrow} -\bar{\nu}_{eR}\gamma_\mu e_R\end{aligned}$$

から次の関係がわかる：

$$\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} = -\bar{\nu}_{eR}{}^C\gamma_\mu e_R{}^C$$

以下には主に ψ_L と $\psi_L{}^C$ を用いて表すことにする．

さていよいよ Glashow–Weinberg–Salam のモデル（以下 GWS モデルと呼ぶ）についてのべることにする.

この場合の群 G は $SU(2)\times U(1)$ である. $SU(2)$ のリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ の3つの生成元を iT^1, iT^2, iT^3 とする. 次の式が成立しているようにとる：

$$[T^i, T^j] = \varepsilon_{ijk}T^k$$

この $\mathfrak{su}(2)$ の恒等表現による T^i の像（したがって T^i 自身であるが, 以前からの記号とそろえるために）を L^i とかく. ここでは

$$L^i = \frac{\sigma^i}{2}$$

ととることにする. この表現によるゲージ場を $A_\mu{}^i (i=1,2,3)$ とかき, この表現によるゲージ変換で現れる g を同じ g で表す.

次に $\mathfrak{u}(1)$ の生成元を Y で表して, そこで現れるゲージ場を B_μ, そこでの g を g' で表す. Y は weak hypercharge を表している.

GWS モデルでは chiral 変換を考える. したがってフェルミ粒子は左巻きと右巻きに分ける. $SU(2)$ は右巻き粒子に対してはトリビアルに作用する(一次元の表現ともいう). したがって $SU(2)$ の主な役割は左巻き粒子に対する作用であるから, $SU(2)$ のことを $SU(2)_L$ とかく. しかし数学的には L の意味はなく, $SU(2)$ 自身のことである. したがって $SU(2)$ で考えられた T^1, T^2, T^3 のことも $T_L{}^1, T_L{}^2, T_L{}^3$ とかく.

電荷の演算子 Q は次の形で定義する：

$$Q = T_L{}^3 + Y$$

（本によっては $Q = T_L{}^3 + \frac{1}{2}Y$ となっている. これはあとでわかるようにどこで $\frac{1}{2}$ を入れるか？という趣味の問題だけである.）$T_L{}^3$ は weak isospin を表す.

global symmetry でもともと考える場はフェルミ粒子の他に複素スカラー場 φ^+, φ^0 がある. これを組にして次のように1つの φ にして表す.

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi^+ \\ \varphi^0\end{pmatrix}$$

ここで φ^+ の電荷は1で φ^0 の電荷は0とする.

もっと詳しくいえば φ の作るヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^0, \qquad \mathcal{H}^+ \simeq \mathcal{H}^0$$

の形であって

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$$

すなわち $\mathcal{H}^+$ の元は $\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathcal{H}^0$ の元は $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$ の形にかき，一般の $\mathcal{H}$ の元は $\mathcal{H}^+$ の元と $\mathcal{H}^0$ の元の和になっている．この $\mathcal{H}$ は $SU(2)$，$\mathfrak{su}(2)$ の表現空間になっているとする．したがって φ^+ の電荷が1の意味は

$$Q\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから $Q = T_L{}^3 + Y$ を考えると

$$T_L{}^3\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$Y\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

であることがわかる．

全く同様にして

$$Y\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$$

となるから Y は φ の作る表現空間の上では $\frac{1}{2}$ というスカラーに等しいことがわかる．このことを次の形で表す：

$$(T, Y)_\varphi = \left(2,\ \frac{1}{2}\right)$$

この意味は φ の表現空間では T は2次元の表現であり，Y-荷は $\frac{1}{2}$ である．

したがって $D_\mu\varphi$ は次の形をしている：

$$D_\mu\varphi = \left(\partial_\mu - ig\frac{\sigma^i A_\mu{}^i}{2} - \frac{ig'}{2}B_\mu\right)\varphi$$

したがって φ とゲージ場に関する Lagrangian 密度は次の形になる：

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + (D^\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi - V(\varphi)$$

ここに $F^i{}_{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu}$ は次の形と定義する：

$$F^i{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu{}^i - \partial_\nu A_\mu{}^i + g\varepsilon_{ijk}A_\mu{}^j A_\nu{}^k$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

ポテンシャル $V(\varphi)$ は4次までで，$SU(2)\times U(1)$ で不変でなければならないから，一般的には次の形となる：

$$V(\varphi)=\mu^2\varphi^\dagger\varphi+\lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2$$

以下に Higgs モデルを考えるためには $V(\varphi)$ は下に有界でなければならないから $\lambda>0$ とする．

次にフェルミ粒子であるが，もちろん

第1世代	ν_e	e^-	u	d
第2世代	ν_μ	μ^-	c	s
第3世代	ν_τ	τ^-	t	b

を同じように取り扱う．左巻きの粒子だけを考えて，まずクォークでは

$$q_{mL}{}^0=\begin{pmatrix}u_m{}^0\\d_m{}^0\end{pmatrix}_L$$

と2つの組にして表現空間を作る．ここで0は弱い相互作用の表現空間として考えていることを示す．ここではクォークの色は無視して考える．m をもっと詳しくいえば

$$q_{1L}{}^0=\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}_L,\qquad q_{2L}{}^0=\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}_L,\qquad q_{3L}{}^0=\begin{pmatrix}t\\b\end{pmatrix}_L$$

ということになる．

同様にレプトンの方でも次のような2つの組にして表現空間を作る：

$$l_{mL}{}^0=\begin{pmatrix}\nu_m{}^0\\e_m{}^0\end{pmatrix}_L\qquad(m=1,2,3)$$

前と同じく m は世代の番号を表す．

u,c,t の電荷は $+\dfrac{2}{3}$ で d,s,b の電荷は $-\dfrac{1}{3}$ であるから，前と同じ計算をすれば左巻きのクォークの Y-荷は $\dfrac{1}{6}$ であることがわかる．同様にして左巻きのレプトンの Y-荷は $-\dfrac{1}{2}$ であることがわかる．

ところで右巻き粒子 $e_{mR}{}^0$，$u_{mR}{}^0$，$d_{mR}{}^0$ を考えれば，これは $SU(2)$ の表現はトリビアルである．すなわち $A\in SU(2)$ とすれば $Ae_{mR}{}^0=e_{mR}{}^0$，$Au_{mR}{}^0=u_{mR}{}^0$，$Ad_{mR}{}^0=d_{mR}{}^0$ となる．したがって $\mathfrak{su}(2)$ の方で考えれば $X\in\mathfrak{su}(2)$ とすれば $Xe_{mR}{}^0=0$，$Xu_{mR}{}^0=0$，$Xd_{mR}{}^0=0$ となる．$iT_L{}^3\in\mathfrak{su}(2)$ であるから $e_{mR}{}^0$，$u_{mR}{}^0$，$d_{mR}{}^0$ の Y-荷は電荷に等しく，それぞれ -1，$+\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{1}{3}$ であることがわかる．もちろん右巻きのニュートリノ

$\nu_{mR}{}^0$ はこのモデルでは存在しない.

したがってフェルミ粒子の運動エネルギーを表す Lagrangian 密度は次の形となる：

$$\mathcal{L}_f = \sum_m (\bar{q}_{mL}{}^0 i\not{D} q_{mL}{}^0 + \bar{l}_{mL}{}^0 i\not{D} l_{mL}{}^0 + \bar{u}_{mR}{}^0 i\not{D} u_{mR}{}^0 + \bar{d}_{mR}{}^0 i\not{D} d_{mR}{}^0 + \bar{e}_{mR}{}^0 i\not{D} e_{mR}{}^0)$$

ここで m はもちろん世代の数を表す．ここで D_μ の意味は正確には次のものである：

$$D_\mu q_{mL}{}^0 = \left(\partial_\mu - \frac{ig}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu - \frac{ig'}{6}B_\mu\right)q_{mL}{}^0$$

$$D_\mu l_{mL}{}^0 = \left(\partial_\mu - \frac{ig}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu\right)l_{mL}{}^0$$

$$D_\mu u_{mR}{}^0 = \left(\partial_\mu - \frac{2}{3}ig'B_\mu\right)u_{mR}{}^0$$

$$D_\mu d_{mR}{}^0 = \left(\partial_\mu + \frac{1}{3}ig'B_\mu\right)d_{mR}{}^0$$

$$D_\mu e_{mR}{}^0 = (\partial_\mu + ig'B_\mu)e_{mR}{}^0$$

ここで u, d, e について $\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu$ の項がないのはこれらの粒子の空間は $SU(2)$ のトリビアルな表現であるから，σ を掛ければ 0 となって消えてしまうからである．

ここでフェルミ粒子の裸の質量を表す項はゲージ不変ではないので禁止されている．

Lagrangian 密度の全体は前の $\mathcal{L}_0$ とこの $\mathcal{L}_f$ それに Yukawa 項ともう 1 つ ghost の粒子の表す項を付け加えたものになっている．この ghost 粒子はくりこみ可能の条件等をみたすために付け加えられるものであって，物理的な粒子を表すものではない．

さてこのモデルでの Higgs 機構を考えるために，まず

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi^+\\ \varphi^0\end{pmatrix}, \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_R + i\varphi_I), \qquad \varphi_R = \begin{pmatrix}\varphi_R{}^1\\ \varphi_R{}^2\end{pmatrix}, \qquad \varphi_I = \begin{pmatrix}\varphi_I{}^1\\ \varphi_I{}^2\end{pmatrix}$$

と φ を 2 つの Hermite な φ_R と φ_I に分解する．したがって次の式がでる：

$$\varphi^\dagger\varphi = \frac{1}{2}((\varphi_R{}^1)^2 + (\varphi_R{}^2)^2 + (\varphi_I{}^1)^2 + (\varphi_I{}^2)^2)$$

必要ならば $SU(2) \times U(1)$ の global な変換をして，いま $\langle 0|\varphi|0\rangle$ が次の形であるようにする：

$$v_R = \langle 0|\varphi_R|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\ \nu\end{pmatrix}, \qquad v_I = \langle 0|\varphi_I|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$v = \langle 0|\varphi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \nu\end{pmatrix}$$

φ_R は Hermite であるから ν は実数である．

$\varphi_1 = \varphi_R{}^1$, $\varphi_2 = \varphi_R{}^2$, $\varphi_3 = \varphi_I{}^1$, $\varphi_4 = \varphi_I{}^2$ とすれば

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_a}\bigg|_{\varphi=v} = 0$$

を計算すれば $\varphi = v$ は $\varphi_R{}^1 = 0$, $\varphi_R{}^2 = \nu$, $\varphi_I{}^1 = 0$, $\varphi_I{}^2 = 0$ のことであるから

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2((\varphi_R{}^1)^2 + (\varphi_R{}^2)^2 + (\varphi_I{}^1)^2 + (\varphi_I{}^2)^2)$$

$$+ \frac{1}{4}\lambda((\varphi_R{}^1)^2 + (\varphi_R{}^2)^2 + (\varphi_I{}^1)^2 + (\varphi_I{}^2)^2)^2$$

で計算すれば $\varphi = v$ のときの $V(\varphi)$ を $V(\nu)$ とかけば

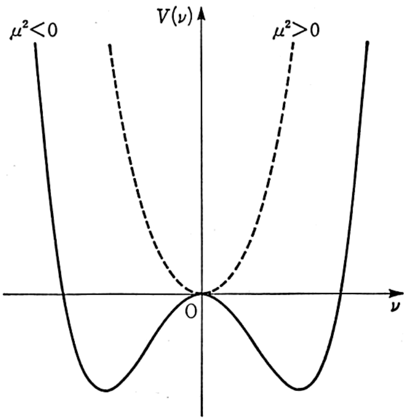
$$V(\nu) = \frac{1}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{1}{4}\lambda\nu^4$$

となり $\displaystyle\frac{\partial V}{\partial \varphi_a}\bigg|_{\varphi=v} = 0$ からでてくる式は結果的には次の式と同じものになる：

$$V'(\nu) = \nu(\mu^2 + \lambda\nu^2) = 0$$

したがって $V(\varphi)$ の最小は $\mu^2 > 0$ と $\mu^2 < 0$ とによって次の ν のときに起きる：

$$\nu = \begin{cases} 0 & (\mu^2 > 0) \\ \left(\dfrac{-\mu^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} & (\mu^2 < 0) \end{cases}$$



したがって自発的対称性の破れは $\mu^2 < 0$ のときに起きる．したがって以下 $\mu^2 < 0$ とする．

ここで自発的対称性の破れをみるために $L^i v$ を計算すれば，ここで L^i は $\frac{1}{2}\sigma^i$ と Y である．ところで $Y\varphi = \frac{1}{2}\varphi$ である（このとき $Y_\varphi = \frac{1}{2}$ とかく）．ゆえに

$$\frac{1}{2}\sigma^i v \neq 0 \qquad \left(\frac{\sigma^3}{2} + Y_\varphi\right)v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

$$Y_\varphi v = \frac{1}{2}v \neq 0$$

$$\left(\frac{\sigma^3}{2} - Y_\varphi\right)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \neq 0$$

したがって T^1, T^2, $T^3 - Y$ に関する対称性は破れるが $Q = T^3 + Y$ についての対称性は破れない．

したがって1個の質量のないゲージボーズ粒子（すなわち光子）と3個の質量のあるボーズ粒子が導入されることがわかる．

Higgs 粒子の場は次の形で与えられる：

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i \sum \xi^i L^i) \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + \eta \end{pmatrix}$$

ここで $\sum$ は L^i を $T^1, T^2, T^3 - Y$ でとったものである．φ は4つの Hermite 場からできているがその内3つが質量のあるボーズ粒子の場になるから，η が1つ残り η は物理的な（すなわち ghost でない）Hermite な Higgs 場になっている．ここで前と多少かき方が異なっているがこれは ν のとり方その他からくることで本質的なことではない．

Higgs 粒子の質量をみるために（または質量があるかどうかをみるために）ξ^i を無限小として0とおけば

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + \eta \end{pmatrix}$$

これからポテンシャル $V(\varphi)$ は

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}(\nu + \eta)^2 + \frac{\lambda}{4}(\nu + \eta^4) = \frac{-\mu^4}{4\lambda} - \mu^2\eta^2 + \lambda\nu\eta^3 + \frac{\lambda}{4}\eta^4$$

質量を μ_η とすれば2次の項は $\mu_\eta{}^2\eta^2/2$ となっているから

$$\mu_\eta{}^2 = -2\mu^2 > 0$$

となって，このモデルでの Higgs 粒子は質量があることがわかる．

同様にして φ の運動エネルギーの項をみれば

$$(D^\mu\varphi)^\dagger D_{\mu\varphi} = \frac{1}{2}(0,\ \nu)\left(\frac{g}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu + \frac{g'}{2}B_\mu\right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} + \eta \text{ の入った項}$$

η の入った項は Higgs 粒子の項であるから，いま3つの質量のあるゲージボーズ粒子の様子を調べるために

$$\frac{1}{2}(0, \nu)\left(\frac{g}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu + \frac{g'}{2}B_\mu\right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}$$

を調べることにする．このために，まず $\frac{g}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu + \frac{g'}{2}B_\mu$ を計算すれば

$$\frac{g}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu+\frac{g'}{2}B_\mu$$

$$=\frac{g}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & A_\mu{}^1\\ A_\mu{}^1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -iA_\mu{}^2\\ iA_\mu{}^2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_\mu{}^3 & 0\\ 0 & -A_\mu{}^3\end{pmatrix}\right)+\frac{g'}{2}\begin{pmatrix}B_\mu & 0\\ 0 & B_\mu\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{g}{2}A_\mu{}^3+\frac{g'}{2}B_\mu & \frac{g}{2}(A_\mu{}^1-iA_\mu{}^2)\\ \frac{g}{2}(A_\mu{}^1+iA_\mu{}^2) & -\frac{g}{2}A_\mu{}^3+\frac{g'}{2}B_\mu\end{pmatrix}$$

したがって

$$\left(\frac{g}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu+\frac{g'}{2}B_\mu\right)\begin{pmatrix}0\\ \nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{g}{2}(A_\mu{}^1-iA_\mu{}^2)\nu\\ \left(-\frac{g}{2}A_\mu{}^3+\frac{g'}{2}B_\mu\right)\nu\end{pmatrix}$$

したがって

$$\frac{1}{2}(0,\nu)\left(\frac{g}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu+\frac{g'}{2}B_\mu\right)^2\begin{pmatrix}0\\ \nu\end{pmatrix}$$

$$=\frac{g^2\nu^2}{8}(A^{1\mu}-iA^{2\mu})(A_\mu{}^1+iA_\mu{}^2)+\frac{\nu^2}{8}(-gA^{3\mu}+g'B^\mu)(-gA_\mu{}^3+g'B_\mu)$$

いま $W_\mu{}^\pm$, $M_W{}^2$ を次の式で定義すれば

$$W_\mu{}^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu{}^1\mp iA_\mu{}^2),\qquad M_W{}^2=\frac{g^2\nu^2}{4}$$

上の式の右辺の第一項は $M_W{}^2W^{\mu+}W_\mu{}^-$ と表される．さらに Z_μ と $M_Z{}^2$ を次の式で定義する：

$$Z_\mu=\frac{g'B_\mu-gA_\mu{}^3}{\sqrt{g^2+g'^2}},\qquad M_Z{}^2=(g^2+g'^2)\frac{\nu^2}{4}$$

明らかに上の式の右辺の第 2 項は $\frac{M_Z{}^2}{2}Z^\mu Z_\mu$ と表される．いまさらに Weinberg の角 θ_W を

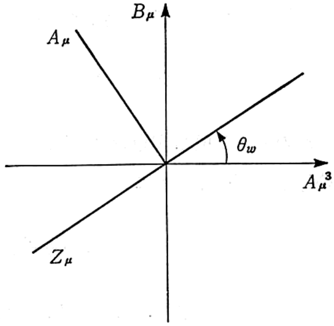
$$\tan\theta_W=\frac{g'}{g}$$

で定義すれば

$$Z_\mu=\sin\theta_W B_\mu-\cos\theta_W A_\mu{}^3,$$

$$M_Z{}^2=\frac{M_W{}^2}{\cos^2\theta_W}$$

となる．さらに $Q=T^3+Y$ に対応する質量の



ないゲージボーズ粒子すなわち光子の場は

$$A_\mu = \frac{gB_\mu + g'A_\mu{}^3}{\sqrt{g^2+g'^2}} = \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W A_\mu{}^3$$

で与えられる.

さて，フェルミ粒子の運動エネルギーからゲージ理論と Higgs 機構によって導かれた $\mathcal{L}_f$ の意味を調べることにしよう．すなわち次のものを調べるわけである.

$$\bar{q}_{mL}{}^0 i\not{D} q_{mL}{}^0 + \bar{l}_{mL}{}^0 i\not{D} l_{mL}{}^0 + \bar{u}_{mR}{}^0 i\not{D} u_{mR}{}^0 + \bar{d}_{mR}{}^0 i\not{D} d_{mR}{}^0 + \bar{e}_{mR}{}^0 i\not{D} e_{mR}{}^0$$

いまこのなかで代表的なものとして $\bar{l}_{mL}{}^0 i\not{D} l_{mL}{}^0$ をとればこれは次の形である：

$$\bar{l}_{mL}{}^0 i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{ig}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu\right)l_{mL}{}^0$$

ここで ∂ の項は運動エネルギーを表す項になる．これを除いた次の項を考える：

$$\frac{1}{2}\bar{l}_{mL}{}^0\gamma^\mu(g\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu - g'B_\mu)l_{mL}{}^0$$

明らかに $g\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu - g'B_\mu$ は次の行列となる：

$$\begin{pmatrix} gA_\mu{}^3 - g'B_\mu & g(A_\mu{}^1 - iA_\mu{}^2) \\ g(A_\mu{}^1 + iA_\mu{}^2) & -gA_\mu{}^3 - g'B_\mu \end{pmatrix}$$

ここで $W_\mu{}^\pm$ の定義および次の式を用いれば

$$B_\mu = \frac{gA_\mu + g'Z_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \qquad A_\mu{}^3 = \frac{g'A_\mu - gZ_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}$$

上の行列は次の行列となる：

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{g^2+g'^2}Z_\mu & \dfrac{g}{\sqrt{2}}W_\mu{}^+ \\ \dfrac{g}{\sqrt{2}}W_\mu{}^- & -\dfrac{(g'^2-g^2)Z_\mu + 2gg'A_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} \end{pmatrix}$$

これから $\frac{1}{2}\bar{l}_{mL}{}^0\gamma^\mu(g\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu - g'B_\mu)l_{mL}{}^0$ の値が次のものであることがわかる：

$$\frac{1}{2}\Bigg(-\sqrt{g^2+g'^2}\,\bar{\nu}_{mL}{}^0\gamma^\mu Z_\mu \nu_{mL}{}^0 + \bar{\nu}_{mL}{}^0\gamma^\mu\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu{}^+ e_{mL}{}^0 + \bar{e}_{mL}{}^0\gamma^\mu\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu{}^-\nu_{mL}{}^0$$
$$- \bar{e}_{mL}{}^0\gamma^\mu\frac{(g'^2-g^2)Z_\mu + 2gg'A_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}e_{mL}{}^0\Bigg)$$

次に $\bar{q}_{mL}{}^0 i\not{D} q_{mL}{}^0$ の ∂ の項を除いたものは

$$\frac{1}{2}\bar{q}_{mL}{}^0\gamma^\mu\left(g\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu + \frac{1}{3}g'B_\mu\right)q_{mL}{}^0$$
$$= \frac{1}{2}\bar{q}_{mL}{}^0\gamma^\mu(g\vec{\sigma}\cdot\vec{A}_\mu - g'B_\mu)q_{mL}{}^0 + \frac{2}{3}\bar{q}_{mL}{}^0\gamma^\mu g'B_\mu q_{mL}{}^0$$

であるから明らかに次の式がでてくる：

$$\frac{1}{2}\Big(-\sqrt{g^2+g'^2}\,\bar{u}_{mL}{}^0\gamma^\mu Z_\mu u_{mL}{}^0+\bar{u}_{mL}{}^0\gamma^\mu\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu{}^+d_{mL}{}^0+\bar{d}_{mL}{}^0\gamma^\mu\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu{}^-u_{mL}{}^0$$

$$-\bar{d}_{mL}{}^0\gamma^\mu\frac{(g'^2-g^2)Z_\mu+2gg'A_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}d_{mL}{}^0\Big)$$

$$+\frac{2}{3}g'\bar{u}_{mL}{}^0\gamma^\mu\frac{gA_\mu+g'Z_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}u_{mL}{}^0+\frac{2}{3}g'\bar{d}_{mL}{}^0\gamma^\mu\frac{gA_\mu+g'Z_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}d_{mL}{}^0$$

$W^\pm$ は上の２つの項にしかでてこないから，$W^\pm$ の項をまとめれば，次の２つの項となる：

$$\frac{g}{2\sqrt{2}}(\bar{e}_{mL}{}^0\gamma^\mu\nu_{mL}{}^0+\bar{d}_{mL}{}^0\gamma^\mu u_{mL}{}^0)W_\mu{}^-$$

$$\frac{g}{2\sqrt{2}}(\bar{\nu}_{mL}{}^0\gamma^\mu e_{mL}{}^0+\bar{u}_{mL}{}^0\gamma^\mu d_{mL}{}^0)W_\mu{}^+$$

ところで $\bar{e}_{mL}{}^0\gamma^\mu\nu_{mL}{}^0=\bar{e}_m{}^0\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_m{}^0$ となるから，いま charged weak current $J^\mu{}_W$ を次の式で定義すれば

$$J^\mu{}_W=\sum_m(\bar{e}_m{}^0\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_m{}^0+\bar{d}_m{}^0\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_m{}^0)$$

$W^\pm$ のでてくるところは次の形となる：

$$\frac{g}{2\sqrt{2}}(J^\mu{}_W W_\mu{}^-+J^\mu{}_W{}^\dagger W_\mu{}^+)$$

この charged weak current については以前にフェルミの理論といって，運動量が M_W に比して小さいときに成立する理論があって，この式はそのフェルミの理論の式と適合している．フェルミの理論との比較から

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8}M_W{}^2=\frac{1}{2}\nu^2$$

が得られる．ここにフェルミの定数 G_F は

$$G_F\simeq 1.027\times 10^{-5}M_p{}^{-2}$$

であり M_p は陽子の質量である．これから ν を計算することができる．

$\mathcal{L}_f$ の残りの項から運動量でない項は次のものとなる：

$$\frac{2}{3}g'\bar{u}_{mR}{}^0\gamma^\mu B_\mu u_{mR}{}^0-\frac{1}{3}g'\bar{d}_{mR}{}^0B_\mu d_{mR}{}^0-g'\bar{e}_{mR}{}^0B_\mu e_{mR}{}^0$$

これを A_μ と Z_μ との項に分ければ

$$\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\Big(\frac{2}{3}\bar{u}_{mR}{}^0\gamma^\mu u_{mR}{}^0-\frac{1}{3}\bar{d}_{mR}{}^0\gamma^\mu d_{mR}{}^0-\bar{e}_{mR}{}^0\gamma^\mu e_{mR}{}^0)A_\mu$$

$$+\frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(\frac{2}{3}\bar{u}_{mR}{}^0\gamma^\mu u_{mR}{}^0-\frac{1}{3}\bar{d}_{mR}{}^0\gamma^\mu d_{mR}{}^0-\bar{e}_{mR}{}^0\gamma^\mu e_{mR}{}^0\right)Z_\mu$$

となる．次に A_μ の項をまとめれば

$$\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}J^\mu{}_{EM}A_\mu$$

となる．ここに

$$J^\mu{}_{EM}=\sum_m\left(\frac{2}{3}\bar{u}_m{}^0\gamma^\mu\mu_m{}^0-\frac{1}{3}\bar{d}_m{}^0\gamma^\mu d_m{}^0-\bar{e}_m{}^0\gamma^\mu e_m{}^0\right)$$

となる．ここで $\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L+\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ を用いている． $J^\mu{}_{EM}$ は electromagnetic current を表す．したがって

$$e=\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}=g\sin\theta_W$$

がでてくる．ここに e は陽子の電荷を表す．

同様にして Z_μ の項をまとめれば次の形となる：

$$-\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2}J^\mu{}_Z Z_\mu$$

ここに $J^\mu{}_Z$ は次の形である：

$$J^\mu{}_Z=\sum_m\bar{\psi}_m{}^0\gamma^\mu(T_{mL}{}^3(1-\gamma_5)-2q_m\sin^2\theta_W)\psi_m{}^0$$

ここで $\psi_m{}^0$ はすべてのフェルミ粒子，すなわち u_m, d_m, ν_m, e_m を動くものとする． $T_{mL}{}^3$ は T^3 の $\psi_{mL}{}^0$ の値を意味する．第２項はちょうど $-2\sin^2\theta_W J^\mu{}_{EM}$ になっている．

$\sin^2\theta_W$ が neutral current の相互作用の測定から得られるので， g, g', ν のすべてが $G_F/\sqrt{2}=\frac{1}{2}\nu^2$, $e=g\sin\theta_W$ から求められる．これから M_W, M_Z が計算され次の値が予言される：

$$M_W=\frac{g\nu}{2}=\frac{37.3\,\text{GeV}}{\sin\theta_W},\qquad M_Z=\frac{M_W}{\cos\theta_W}=\frac{74.6\,\text{GeV}}{\sin 2\theta_W}$$

ここに $1\,\text{GeV}=10^9\,\text{eV}$ である．また $\sin^2\theta_W$ は

$$\sin^2\theta_W=0.229\pm0.014$$

となっている．

§27. $SU(5)$ モデル

この節では初めて電磁作用，弱い相互作用，強い相互作用を統一した Georgi（ジョージィ）と Gloshow の $SU(5)$ モデルについてのべることにする．

最初にいろいろな準備から始めることにする．まず量子色力学 (Quantum Chromodynamics 以下 QCD とかく）について考える．

量子色力学はゲージ群を $SU(3)$ としたときのゲージ理論である． $SU(3)$ の T^i としては

$$T^i = L^i = \frac{\lambda^i}{2} \qquad (i=1, \cdots, 8)$$

をとる．ここに λ^i は Gell-Mann の行列である．さらにこの場合の $c_{ijk} = f_{ijk}$ は完全反対称になっている．クォークは $q_r{}^\alpha$ とかいて $\alpha = R$ (赤), G (緑), B (青) の色があり r は u, d, c, s, t, b に分かれることは前にのべた通りである．$SU(3)$ は q^α の α すなわち色の方に作用する．このため色 (color) の c をとって $SU(3)^c$ とかかれる．もちろん数学的には $SU(3)$ と同じであって c はその内容の方を表している．

$SU(3)^c$ はレプトンにはトリビアルに作用する． $SU(3)^c$ には自発的対称性の破れはないものと考えられている．いま $SU(3)^c$ からできるゲージ場を G^i で表す．G^i はグルーオンと呼ばれている．グルーオンの場 G^i から行列 G を次の式で定義する：

$$G = \sum_{i=1}^{\infty} G^i \frac{\lambda^i}{\sqrt{2}}$$

この G の行列の成分を $G_\beta{}^\alpha = G_{\alpha\beta}$ で表す．したがって

$$(G_\beta{}^\alpha)^\dagger = G_\alpha{}^\beta, \qquad G_\alpha{}^\alpha = 0$$

が成立する．自発的対称性の破れがないからグルーオンの質量は 0 である．

QCD の Lagrangian 密度を Yukawa 項と ghost の項を除いてかけば，次のものになる：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4} F^i{}_{\mu\nu} F^{i\mu\nu} + \sum_r \bar{q}_\alpha{}^r i \not{D}_\beta{}^\alpha q_r{}^\beta$$

ここで $F^i{}_{\mu\nu}$ と D とは次の形である：

$$F^i{}_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu{}^i - \partial_\nu G_\mu{}^i + g_s f_{ijk} G_\mu{}^j G_\nu{}^k$$

$$D_{\mu\beta}{}^\alpha = (D_\mu)_{\alpha\beta} = \partial_\mu \delta_{\alpha\beta} - i g_s G_\mu{}^i (L^i)_{\alpha\beta}$$

$$= \partial_\mu \delta_{\alpha\beta} - \frac{i g_s}{\sqrt{2}} G_{\mu\beta}{}^\alpha$$

D_μ は香りには関係なく，また chiral でもないすなわち q_L と q_R について同じである．

$SU(5)$ モデルは $SU(3)^c \times SU(2)_L \times U(1)$ を $SU(5)$ に埋め込んでできる理論である．もちろん強い相互作用は $SU(3)^c$ のところが，弱い相互作用は $SU(2)_L$ のところが，

また電磁作用は $U(1)$ で行われる．したがって最初に $SU(5)$ について必要なことを整理しておく．

まず $SU(5)$ の次元は $5^2-1=24$ である．したがって，前と同じく $\mathfrak{su}(5)$ の生成元を $iT^1, \cdots, iT^{24}$ とする．このとき T^i は Hermite である．前と同じく

$$\mathrm{Tr}(T^iT^j)=\frac{\delta_{ij}}{2}$$

が成立しているものとする．

一般に $SU(n)$ の表現が便利なことの1つは恒等表現自身がユニタリー表現になっていることである．したがって上の T^i が L^i になっているときもある．一般の表現 L^i について

$$\mathrm{Tr}(L^iL^j)=\frac{\delta_{ij}}{2}$$

を仮定する．

たとえば物理学者は次のように λ_i を定義して $T_i=\dfrac{1}{2}\lambda_i$ とおく：

$$\lambda_1=\begin{pmatrix} & 1 & & & \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix} & -i & & & \\ i & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix} & & -i & & \\ & & & & \\ i & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & -i & & \\ & i & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_8=\sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_9=\begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{10}=\begin{pmatrix} & & & -i & \\ & & & & \\ & & & & \\ i & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{11}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{12}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & -i & \\ & & & & \\ & i & & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{13}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{14}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & -i & \\ & & i & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{15}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{16}=\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{17}=\begin{pmatrix} & & & & -i \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ i & & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{18}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{19}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & -i \\ & & & & \\ & & & & \\ & i & & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{20}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & 1 & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{21}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & -i \\ & & & & \\ & & i & & \end{pmatrix},\quad \lambda_{22}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{23}=\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & -i \\ & & & i & \end{pmatrix},\quad \lambda_{24}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -4 \end{pmatrix}$$

さて $su(5)$ の階数 l は 4 であるから，その基本的ウェイトを $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ とすれば，それぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ に対応する既約表現の次元は前にのべた式から簡単に計算されて 5, 10, 10, 5 となる．明らかに λ_3 の既約表現は λ_2 の既約表現の共役表現であり，λ_4 の既約表現は λ_1 の既約表現の共役表現であるから，以下に $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ に対応する既約表現をそれぞれ 5, 10, 10*, 5* で表すことにする．もちろん 5 は恒等表現を表している．

$SU(5)$ モデルで用いる $SU(5)$ の表現は随伴表現，10，5* の 3 つである．ここで 10 と 5* はフェルミ粒子に対して用いられ，随伴表現は 24 個のゲージボーズ粒子を導入する

(随伴表現の表現空間は $\mathfrak{su}(5)$ であるから 24 次元である).

T^i の 5 による像を $L^i(5)$ または単に L^i, 5^* による像を $L^i(5^*)$, 10 による像を $L^i(10)$ で表す.

いまフェルミ粒子は第1世代だけかくことにして，すべて左巻きで表すことにする（もちろん反粒子も用いる). さらにフェルミ粒子を2つに分けて

$$5^*: \quad \psi_{La} = \begin{pmatrix} d_1{}^c \\ d_2{}^c \\ d_3{}^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L$$

は 5^* の変換を受けるものとする. ここで外側に L がついているのは内の全部にいちいち L をつける労を省いたものである.

ここで ψ_{La} の意味は $\psi_{L1}=d_{1L}{}^c$, $\psi_{L2}=d_{2L}{}^c$, $\psi_{L3}=d_{3L}{}^c$, $\psi_{L4}=e_L{}^-$, $\psi_{L5}=-\nu_{eL}$ であり，$d_1{}^c, d_2{}^c, d_3{}^c$ の 1,2,3 は色であり，c は荷電共役変換すなわち反粒子を表す.

残りの左巻きフェルミ粒子は 10 の変換を受けるものとする（第1世代のフェルミ粒子の数は 15 だからちょうど数が合う). まず §16 の理論を思いだせば 10 は階数 2 の交代テンソルに対する表現である.

いま 5 の表現を L^i で表そう. L^i の (a,b) 成分を $L_{ab}{}^i$ で表すことにすれば，交代テンソルを

$$\sum a_{ij} v_i \otimes v_j, \qquad a_{ij} = -a_{ji}$$

として変換を A とし，$\sum a_{ij} v_i \otimes v_j$ を $a_{ij} v_i \otimes v_j$ で表せば

$$\begin{aligned} A a_{ij} v_i \otimes v_j &= a_{ij}(A v_i) \otimes v_j + a_{ij} v_i \otimes (A v_j) \\ &= a_{ij}(A_{ki} v_k) \otimes v_j + a_{ij} v_i \otimes (A_{lj} v_l) \\ &= a_{ij} A_{ki} v_k \otimes v_j + a_{ij} A_{lj} v_i \otimes v_l \\ &= a_{kj} A_{ik} v_i \otimes v_j + a_{il} A_{jl} v_i \otimes v_j \\ &= (A_{ik} a_{kj} + A_{jl} a_{il}) v_i \otimes v_j \end{aligned}$$

になっている. 当然のことであるが $v_j \otimes v_i$ の係数は

$$(A_{jk} a_{ki} + A_{il} a_{jl}) = -(A_{jk} a_{ik} + A_{il} a_{lj}) = -(A_{ik} a_{kj} + A_{jl} a_{il})$$

となってできたものは再び交代テンソルになっている. したがって表現空間を行列の形でかいて

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{pmatrix}$$

$L(10)$ の変換は

$$a_{ij} \longrightarrow L_{ik}a_{kj} + L_{jl}a_{il}$$

の形で変換するものとすればよい．ここで L は5の表現すなわち恒等表現を表す．

この注意のうえで残りの 10 個のフェルミ粒子（第1世代だけかくが，第2世代，第3世代も全く同様である）を次の形にかくことにする：

$$10: \qquad \psi_L{}^{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3{}^c & -u_2{}^c & -u^1 & -d^1 \\ -u_3{}^c & 0 & u_1{}^c & -u^2 & -d^2 \\ u_2{}^c & -u_1{}^c & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L$$

ここでも 1,2,3 は色であるが粒子では上の添字，反粒子では下の添字にしてある．$\frac{1}{\sqrt{2}}$ は便宜上つけたもので意味はない．

次にゲージボゾンを作る随伴表現であるが，ここで必要というわけでないが序に少しばかり一般の $\mathfrak{su}(n)$ の随伴表現について数学的散歩をすることにする．ここででてくることは一般論およびそこでの公式から直ちにでてくることばかりである．したがって細かい計算はしないが，それは格好の演習問題になっている．もちろん $\mathfrak{sl}(n, C)$ で考えて $n = l + 1$ とおく．

まず第一に $\mathfrak{sl}(n, C)$ は単純である，ということは随伴表現は既約表現になっている．したがってその最高のウェイトは基本的ウェイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ の整係数の一次結合で表される．

この形をみるために随伴表現の最高のウェイトをみれば，これは $\Lambda_1 - \Lambda_n$ となっている．

$$\Lambda_1 - \Lambda_n = \lambda_1 + \lambda_l$$

であるから随伴表現は $\lambda_1 + \lambda_l$ に対応する既約表現になっている．λ_1 に対応する既約表現は n で λ_l に対応する既約表現は n^* だから随伴表現は $n \otimes n^*$ のなかに埋め込めるこ

とがわかる．いま λ を最高のウェイトとする既約表現を ρ_λ と表せば，一般に $\rho_{\lambda+\mu}$ が $\rho_\lambda \otimes \rho_\mu$ のなかに現れる重複度は1である．したがって随伴表現は $n \otimes n^*$ のなかに重複度1で現れる．もっともこの場合は随伴表現の次元が n^2-1 で，$n \otimes n^*$ の次元が n^2 だから明らかである．いまトリビアルな表現（すなわち次元が1の表現）を ρ_0 とすれば，ρ_0 が任意の表現 ρ に対して $\rho \otimes \rho^*$ に現れる重複度は1であるから $n \otimes n^*$ が随伴表現とトリビアルな表現の直和になっていることがわかる．もっともこの場合は次元をみただけで明らかである．

以上の議論から $\mathfrak{su}(n)$ の場合も随伴表現は $\lambda_1 + \lambda_l$ に対応する表現であり，$n \otimes n^*$ はトリビアルな表現と随伴表現の直和になっていることがわかる．

もっとも以上のことは $\mathfrak{su}(n)$ の場合には以下のテンソル計算で直接にみることができる．

いま $\{\phi_\alpha\}, \{\phi^\beta\}$ を基本テンソルとする．$X \in SU(5)$ としてその成分を $X_{\alpha\beta} = X_\alpha{}^\beta$ とかけば

$$X\{\phi_\beta\} = \{X_\alpha{}^\beta \phi_\beta\}$$

$$\{\phi^\alpha\} X^{-1} = \{\phi^\alpha X_\alpha{}^{\beta *}\} \qquad (*\text{は複素共役})$$

となる．$\mathfrak{su}(n)$ の元 A を $A_{\alpha\beta} = A_\alpha{}^\beta$ とかけば

$$(\mathrm{Adj}(X)A)_\alpha{}^\beta = X_\alpha{}^\gamma X_\delta{}^{\beta *} A_\gamma{}^\delta$$

となる．$A_\alpha{}^\beta$ をテンソルと考えれば，随伴表現はトレースが0のテンソルの部分空間に制限して得られる．もしトレース0のテンソルに制限しないですべてのテンソルを考えれば $A_\alpha{}^\beta$ の変換は $\phi_\alpha{}^* \phi^\beta$ の変換の共役になっている．すなわち $\phi_\alpha{}^* \phi^\beta A_\alpha{}^\beta$ は $SU(n)$ の変換で不変である．直接に計算をすれば

$$X\{\phi_\alpha{}^* \phi^\beta A_\alpha{}^\beta\} = X_\alpha{}^{\alpha' *} \phi_{\alpha'}{}^* X_{\beta'}{}^\beta \phi^{\beta'} X_\alpha{}^\gamma X_\delta{}^{\beta *} A_\gamma{}^\delta = X_\alpha{}^{\alpha' *} X_\alpha{}^\gamma X_{\beta'}{}^\beta X_\delta{}^{\beta *} \phi_{\alpha'}{}^* \phi^{\beta'} A_\gamma{}^\delta$$

ところで次の式が成立する：

$$X_\alpha{}^{\alpha' *} X_\alpha{}^\gamma = (X^{-1})_{\alpha'}{}^\alpha X_\alpha{}^\gamma = \delta_{\alpha'}{}^\gamma$$

以上により

$$X\{\phi_\alpha{}^* \phi^\beta A_\alpha{}^\beta\} = \{\phi_\gamma{}^* \phi^\delta A_\gamma{}^\delta\}$$

がでてくる．

さて本論にもどることにする．$\mathfrak{su}(5)$ の基底を L^i $(i = 1, \cdots, 24)$ として L^i は前にのべた条件をみたしているものとする．このとき L^i に対応して Hermite ゲージ場 A^i が

導入される．いま A を次の式で定義する：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}A=\sum_{i=1}^{4}L^iA^i$$

この A を次の形で表す：

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc} G_1{}^1-\frac{2B}{\sqrt{30}} & G_2{}^1 & G_3{}^1 & \bar{X}^1 & \bar{Y}^1 \\ G_1{}^2 & G_2{}^2-\frac{2B}{\sqrt{30}} & G_3{}^2 & \bar{X}^2 & \bar{Y}^2 \\ G_1{}^3 & G_2{}^3 & G_3{}^3-\frac{2B}{\sqrt{30}} & \bar{X}^3 & \bar{Y}^3 \\ \hline X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}}+\frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}}+\frac{3B}{\sqrt{30}} \end{array}\right)$$

ここで細かいことは序々に説明するが，1,2,3 は色を表す．左上から右下への対角線に関して対称になるものは反粒子の場を表す．すなわち $\bar{X}^i,\bar{Y}^i$ はそれぞれ X_i, Y_i の反粒子であり，$G_j{}^i$ は $G_i{}^j$ の反粒子になっている．左上の 3×3 行列が $SU(3)^c$ に対応するところであり，右下の 2×2 行列が $SU(2)_L$ に対応するところである．したがって W^-, W^+, W^3 は前と同じ意味をもつ，B は電磁場に相当する．

以下 α,β,γ は 1,2,3 を表し，r,s,t は 4,5 を表すことにして $T\in SU(5)$ についてその成分を $T_\alpha{}^\beta$ で表せば $SU(3)^c$, $SU(2)$ はそれぞれ次の物理の意味での生成元をもつ

$$SU(3)^c \qquad T_\alpha{}^\beta-\frac{1}{3}\delta_\alpha{}^\beta T_\gamma{}^\gamma$$

$$SU(2) \qquad T_r{}^s-\frac{1}{2}\delta_r{}^s T_t{}^t$$

以下 a,b,c は $1,\cdots,5$ を表すことにする．

$U(1)$ の物理の意味での生成元 Y と電荷の演算子 Q は次の形であるものとする：

$$Y=-\frac{1}{3}T_\alpha{}^\alpha+\frac{1}{2}T_r{}^r$$

$$Q=T^3+Y=\frac{1}{2}(T_4{}^4-T_5{}^5)+Y=-\frac{1}{3}T_\alpha{}^\alpha+T_4{}^4$$

さて $(L(n^*))_{ab}=-L_{ba}$ を思いだせば

$$5^*:\qquad \psi_{La}=\begin{pmatrix} d_1{}^c \\ d_2{}^c \\ d_3{}^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L$$

に対する D_μ は次の形になっていることがわかる：

$$(D_\mu\psi_L)_a=\left(\partial_\mu\delta_{ab}+\frac{ig}{\sqrt{2}}(A_\mu)_{ba}\right)\psi_{Lb}$$

次に $L(10)$ の変換は交代テンソルを反対称行列 (a_{ij}) で表したときに

$$a_{ij}\ \longrightarrow\ L_{ik}a_{kj}+L_{jl}a_{il}$$

である事を思いだせば

$$10:\qquad \psi_L{}^{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & u_3{}^c & -u_2{}^c & -u^1 & -d^1 \\ -u_3{}^c & 0 & u_1{}^c & -u^2 & -d^2 \\ u_2{}^c & -u_1{}^c & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L$$

に対する D_μ は次の形になっていることがわかる：

$$(D_\mu\psi_L)^{ab}=\partial_\mu\psi^{ab}-\frac{ig}{\sqrt{2}}(A_\mu)_{ac}\psi^{cb}-\frac{ig}{\sqrt{2}}(A_\mu)_{bd}\psi^{ad}$$

さて §24 ゲージ理論のところでゲージ不変を証明した，ゲージ場の運動エネルギーを表す項は次の形になっている：

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}=-\frac{1}{4}F^i{}_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}=-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})_{ab}(F^{\mu\nu})_{ba}$$

ここに $(F_{\mu\nu})_{ab}$ は次の形である：

$$(F_{\mu\nu})_{ab}=\partial_\mu(A_\nu)_{ab}-\frac{ig}{\sqrt{2}}(A_\mu)_{ac}(A_\nu)_{cb}-(\mu\longleftrightarrow\nu)$$

ここに $(\mu\longleftrightarrow\nu)$ はその前の式に μ と ν とを入れ換えてできた式を意味する．

さて右巻きの 5^* に属する粒子を考えれば

$$(\psi_{R^c})^a=C\bar{\psi}_{La}{}^T=\begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ e^+ \\ -\nu^c \end{pmatrix}_R$$

となって 5^* の共役，したがって 5 の変換を受けることになる．ゆえに D_μ は次の形にな

る：

$$(D_\mu \psi_{R^c})^a = \left(\partial_\mu \delta_{ab} - \frac{ig}{\sqrt{2}}(A_\mu)_{ab}\right)(\psi_{R^c})^b$$

以上をまとめてフェルミ粒子の運動エネルギーを表す項は次のものとなっている：

$$\mathcal{L}_f = i(\bar{\psi}_{R^c})_a(\not{D}\psi_{R^c})^a + i(\bar{\psi}_L)_{ac}(\not{D}\psi_L)^{ac}$$

$$= (\bar{\psi}_{R^c})_a\left(i\not{\partial}\delta_{ab} + \frac{g}{\sqrt{2}}\not{A}_{ab}\right)(\psi_{R^c})^b + (\bar{\psi}_L)_{ac}\left(i\not{\partial}\delta_{ab} + \frac{2g}{\sqrt{2}}\not{A}_{ab}\right)\psi_L{}^{bc}$$

いまこれを 10 変換のフェルミ粒子 $\psi_L{}^{\alpha\beta}$ は次の形に表されることと

$$\psi_L{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}u_{L\gamma}{}^c$$

と荷電共役変換について証明した式

$$\bar{\psi}_{R^c}\gamma_\mu \chi_{R^c} = -\bar{\chi}_L\gamma_\mu\psi_L$$

を用いてかき直せば，そのゲージ部分 $\mathcal{L}_G$ は次の形をしていることがわかる．ここで λ^i は Gell–Mann の行列である．σ^i はもちろん Pauli のスピン行列である：

$$\mathcal{L}_G = g\sum_{i=1}^{8}\left(\bar{u}\not{G}^i\frac{\lambda^i}{2}u + \bar{d}\not{G}^i\frac{\lambda^i}{2}d\right)$$

$$+ g\sum_{i=1}^{3}\left\{(\bar{u},\bar{d})_L\not{W}^i\frac{\sigma^i}{2}\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e,\bar{e}^-)_L\not{W}^i\frac{\sigma^i}{2}\begin{pmatrix}\nu_e\\e^-\end{pmatrix}_L\right\}$$

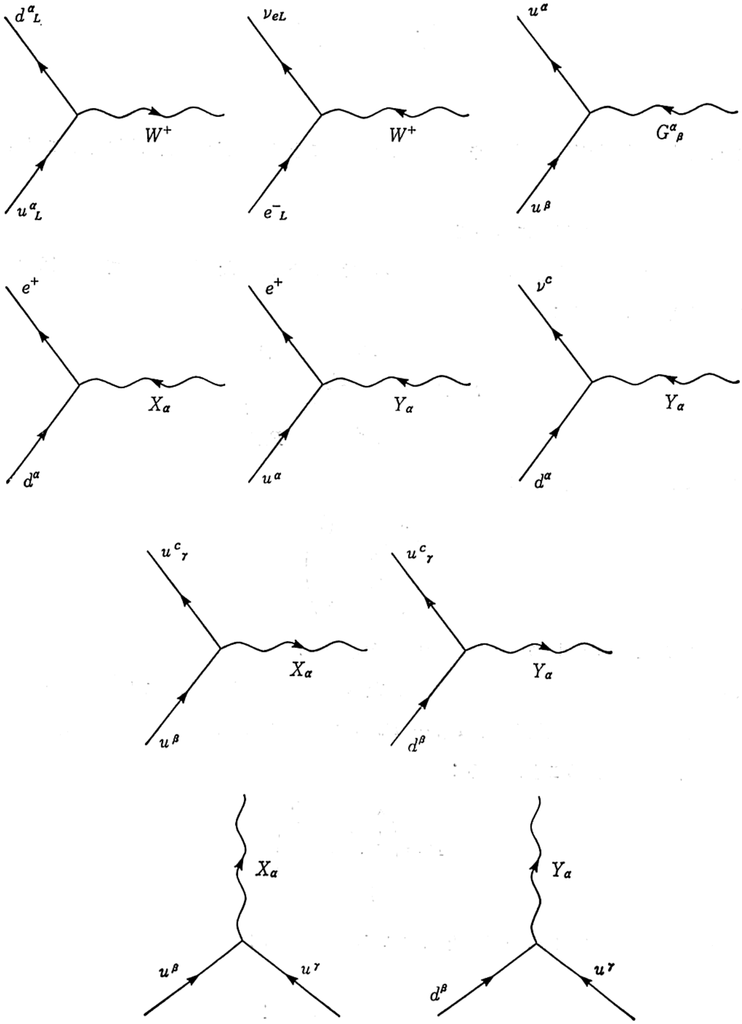
$$+\sqrt{\frac{3}{5}}\,g\left\{-\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\not{B}\nu_L + \bar{e}_L\not{B}e_L) + \frac{1}{6}(\bar{u}_L\not{B}u_L + \bar{d}_L\not{B}d_L)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\bar{u}_R\not{B}u_R - \frac{1}{3}\bar{d}_R\not{B}d_R - \bar{e}_R\not{B}e_R\right\}$$

$$+\frac{g}{\sqrt{2}}\left\{\bar{X}_\mu{}^\alpha(\bar{d}_{R\alpha}\gamma^\mu e_R{}^+ + \bar{d}_{L\alpha}\gamma^\mu e_L{}^+ + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L{}^{c\gamma}\gamma^\mu \mu_L{}^\beta)\right.$$

$$\left.+\bar{Y}_\mu{}^\alpha(-\bar{d}_{R\alpha}\gamma^\mu\nu_R{}^c - \bar{u}_{L\alpha}\gamma^\mu e_L{}^+ + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L{}^{c\gamma}\gamma^\mu d_L{}^\beta) + \mathrm{H.C.}\right\}$$

最初の 2 項は $SU(3)$ と $SU(2)$ の相互作用を表す．第 3 項は $U(1)$ の相互作用を表す．最後の項はバリオン数やレプトン数を変化する，いままでになかった相互作用である．対応する相互作用の図の代表的なものは次の形になっている．


$d^{\alpha}{}_L$
$u^{\alpha}{}_L$
W^+
ν_{eL}
$e^-{}_L$
W^+
u^{α}
u^{β}
$G^{\alpha}{}_{\beta}$
e^+
d^{α}
X_{α}
e^+
u^{α}
Y_{α}
ν^c
d^{α}
Y_{α}
$u^c{}_{\gamma}$
u^{β}
X_{α}
$u^c{}_{\gamma}$
d^{β}
Y_{α}
X_{α}
u^{β}
u^{γ}
Y_{α}
d^{β}
u^{γ}

付　　　録

ここで暗々裡に仮定した常識や，本文で書いたことの補足などを付け加えることにする．

1. Jordan の標準形　について

$A \in M(n, C)$ とするとき，$S \in M(n, C)$ で $\det S \neq 0$ な S をとって $S^{-1}AS$ が次の形になるようにできる：

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_m \end{pmatrix}$$

ここに P_i は次の形とする：

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

上の形の $S^{-1}AS$ を A の Jordan の標準形という．

いま A 自身が Jordan の標準形の形になっているものとする．このとき $f(x)$ を多項式とするとき $f(A)$ の計算には $P_1, \cdots, P_m$ のブロックごとにすればよいから，いま次の形の P だけを考えることにする：

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

このとき P と，次の2つの行列とはすべて可換である：

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このことから §1 の定理2 (p. 5) によって，$P = D + N$ が P の Jordan 分解であることがわかる．いま上の A について考えることにする．P_iの　Jordan 分解を $P_i = D_i$

$+N_i$ とすれば，A の Jordan 分解 $A=D+N$ は明らかに次の形になる：

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_m \end{pmatrix}, \qquad N=\begin{pmatrix} N_1 & & & 0 \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N_m \end{pmatrix}$$

このことから $\mathrm{Tr}(N)=0$.

いま $AB=BA$ として $\mathrm{Tr}(AB)=0$ とする．このときは N と B とは §1 の定理2によって可換であるから p. 87 の定理 2 の直前の注意によって $\mathrm{Tr}(NB)=0$ となる．したがって $\mathrm{Tr}(DB)=0$ となる．以上トリビアルなことであるが，§5 の補題 2 (p. 73) の証明に当然のこととして断りなしに用いられている．

2. コンパクト半単純線形リー群　について

いま G をコンパクト半単純線形リー群として $\mathcal{L}(G)$ をそのリー代数とする．$\mathcal{L}(G)$ の生成元の iT^j $(j=1,\cdots,N)$ を p. 291で

$$\mathrm{Tr}(T^iT^j)=\frac{1}{2}\delta_{ij}$$

ととれることの証明を省略したが，ここにその概略をかいておきたい．

コンパクト位相群についての特色はその上で不変な測度，したがって積分が定義できることである．

いま (ρ, V) を G の表現として，V を複素線形空間，$(\ ,\ )$ を V の上で定義された正の定符号の Hermite な双一次形式とする．いま $g\in G$, $u,v\in V$ として，

$$(\rho(g)u,\ \rho(g)v)$$

の x についての平均を（積分が定義されているということから平均が定義されているということは明らか）

$$\langle u,v\rangle$$

とおけば，$\langle\ ,\ \rangle$ は新しい内積となり，この内積について ρ は次の条件をみたしてユニタリー表現となる：

$$\langle\rho(g)u,\ \rho(g)v\rangle=\langle u,v\rangle$$

さて，表現 ρ の微分 $d\rho$ を以下では $\dot{\rho}$ とかくことにする．いま $X, Y\in\mathcal{L}(G)$ について $B(X,Y)$ を次の式で定義することにする：

$$B(X,Y)=\mathrm{Tr}_V(\rho(X)\rho(Y))$$

このとき次の定理が成立する：

定理　すべての $X \in \mathcal{L}(G)$ について

$$B(X, X) \leq 0$$

となり，さらに次の式が成立する：

$$B(X, X) = 0 \iff X \in \ker \dot{\rho}$$

［**証明**］明らかに次の式が成立する：

$$\langle \rho(\exp tX)u,\ \rho(\exp tX)v \rangle = \langle u, v \rangle$$

これを t で微分して $t=0$ とおけば

$$\langle \dot{\rho}(X)u, v \rangle + \langle u, \dot{\rho}(X)v \rangle = 0$$

したがって〈，〉についての共役を * で表せば

$$\dot{\rho}(X)^* = -\dot{\rho}(X) \qquad (1)$$

が成立する．したがって $\dot{\rho}(X)$ の固有値の全体を $\{\lambda_i\}$ とすれば

$$B(X, X) = \mathrm{Tr}(\dot{\rho}(X)^2) = \sum_i \lambda_i^2$$

となる．ところで（1）から $\dot{\rho}(X)$ の固有値は純虚数となる．したがって $B(X, X) \leq 0$ が証明された．さらに $B(X, X) = 0$ は $\dot{\rho}(X)$ のすべての固有値が 0 となる場合である．ところで $\dot{\rho}(X)$ は（1）により対角化可能であるから $\dot{\rho}(X) = 0$ となる．

いま特に $\dot{\rho}$ を 1 対 1 とすれば $\ker \dot{\rho} = 0$ となるからこのときは $B(\ ,\ )$ は負の定符号となる．このとき任意の $\lambda > 0$ について $\mathcal{L}(G)$ の基底 $X_1, \cdots, X_N$ を上手にとって，

$$T_j = i\rho(X_j) \qquad (j = 1, \cdots, N)$$

とおけば

$$\mathrm{Tr}(T_i T_j) = \lambda \delta_{ij}$$

となるようにできることは明らかである．p. 291 では $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ととっている．

3. Dirac の γ 行列　について

いま p. 286 にのべた Minkowski 空間の計量を $g_{\mu\nu}$ として，Minkowski 空間の基底を u_0, u_1, u_2, u_3 として，対称双一次形式を

$$B(u_\mu, u_\nu) = g_{\mu\nu}$$

によって導入する．このベクトル空間の Clifford 代数を $\mathcal{C}$ として，そのスピン表現を ρ とする．このとき

$$\gamma_\mu = \rho(u_\mu)$$

とおいたものが Dirac の γ 行列である．したがって物理の γ 行列の使用はすべて Clifford 代数の目から眺めることができる．たとえば p. 287 の荷電共役演算子 C の存在は Clifford 代数のスピン表現論から直ちにでてくる．この間の詳しい事情はあとがきにのべた Varadarajan の本をみていただきたい．

あ と が き

我が国では物理のことを考えに入れてかかれたリー群およびリー代数の本が数多くあるのであるが，残念なことにそのほとんどが絶版になっており，私が入手して見ることができたのは次の2冊だけであった.

[1] 山内恭彦，杉浦光夫： 連続群論入門 (1960)，培風館.

[2] 島 和久： 連続群とその表現 (1981)，岩波書店.

両書とも大変よくかかれており，もっと大部の書でなかったことが惜まれる.

本書ではリー群について余りのべなかったが，リー群についての本としては私が見たことのあるものだけをあげれば，

[3] L.S. Pontrjagin (柴岡，杉浦，宮崎共訳)： 連続群論上 (1975)，下 (1975)，岩波書店.

[4] C. Chevalley: Theory of Lie groups (1946), Princeton Univ. Press.

[5] V.S. Varadarajan: Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations (1974), Prentice Hall.

[6] 佐武一郎： リー群の話 (1982)，日本評論社.

以下章別に関係のあるものをあげれば，第1章 pp. 17-18 のユニタリー行列，正規行列，自己共役行列についての最も初等的な解説としては，

[7] 竹内外史： 線形代数と量子力学 (1981)，裳華房.

をあげておきたい.

次にリー代数については，

[8] N. Jacobson: Lie Algebras (1962), John Wiley & Sons.

[9] J.E. Hanphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory (1972), Springer-Verlay.

をあげておきたい. 本書の第2章と第3章は後者に負うところが大きい. [8] は多少古いが捨てがたい. [9] を読みながら時々 [8] を見るのがよい方法と思う.

第4章で §21 の例外リー代数は本書では古いスタイルにしたがったが，現在は Tits (ティッツ) による統一的な方法が主に用いられている. それについては，

[10] N. Jacobson: Exceptional Lie Algebras (1971), Marcel Dekker.

第4章 §22 の正則部分リー代数は,

[11] E.B. Dynkin: Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras, Mat. Sbomik N.S. 30(72), pp. 349-462 (1952); English translation American Math. Soc. Translations, 6 (1957), pp. 111—244.

の第2章の抜粋である. 現在大統一理論の拡張または変形を考えるときは, 多くの場合 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ を大きな単純リー群のなかに埋め込んで考える. このため, どのような埋め込みの可能性があるかを調べることが大切になってくる. この方面で上の Dynkin の論文は基本的な論文になっている.

次に数学者のために物理の文献にふれることにする. まず最低の量子力学と素粒子についてのお話し位は知っておく必要がある. 量子力学についての最少の知識としては, 上の [7] の第2章をあげておく. たった47頁であるから一番手軽であると思うし, ボーズ粒子, フェルミ粒子のことも入っている. 素粒子についてのお話しは多くのところでみられるから適当に読んでいただきたい. 本書に一番近いのは次の本の付録である.

[12] 竹内外史: 量子論理入門 (遊星社, 近刊).

さて以上の準備の上で場の理論一般については

[13] C. Itzykson and J.B. Zuber: Quantum Field Theory (1980), Mc Graw-Hill.

もっともこの本は705頁の大著であるから数学者には拾い読みすることになる.

次にゲージ理論については, 上の [13] の他に,

[14] E.S. Abers and B.W. Lee: Gauge Theories, Physics Reports Vol. 9 (1973), pp. 1-141, North Holland.

がよい.

Glashow-Weinberg-Salam モデルについては,

[15] S.M. Bilenky and J. Hošek: Glashow-Weinberg-Salam Theory of Electroweak Interactions and the Neutral Currents, Physics Reports Vol. 90 (1982), pp. 73-157, North Holland.

が詳しい. 一般の Yang-Mills 場およびその量子化については

[16] L.D. Faddeev and A.A. Slavnov: Gauge Fields (1980), Benjamin/Cummings.

がよい．大統一理論については Physics Reports に多くのよい解説がある．本書は主に次のものにしたがっている：

[17] P. Langacker: Grand Unified Theories and Proton Decay, Physics Reports Vol. 72 (1981) pp. 185 – 385, North Holland.

この方面の理論は最近ファイバー束を用いての微分幾何的取り扱いが流行である．それについては，

[18] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson: Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry, Physics Reports Vol. 66 (1980), pp. 213–393, North Holland.

[19] D. Bleeker: Gauge Theory and Variational Principles (1981), Addison–Wesley.

の２つをあげておく．しかし，両書とも微分幾何過剰で微分幾何が得意な人でないと困るかもしれない．

次に付録でのべた Dirac の γ 行列と Clifford 代数のスピン表現については，

[20] V. S. Varadarajan: Geometry of Quantum Theory II (1970).

をあげておく．この本はもともとは Van Nostrand で出版されたものであるが，現在は Springer の取り扱いになっている．

物理学者がリー代数を手取り早く用いるのには，

[21] H. Georgi: Lie Algebras in Particle Physics (1982), Benjamin/Cummings.

がよい．最後に Clifford 代数についての文献をあげれば，

[22] R. Brauer and H. Weyl: Spinors in n–dimensions, Amer. J. Math. 57 (1935), pp. 425 – 449.

[23] C. Chevalley: The Algebraic Theory of Spinors, Columbia Univ. Press (1954).

[24] E. Cartan: The theory of spinors, M. I. T. Press.

[25] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro: Clifford Modules, Topology 3 (1964), pp. 3–38.

Clifford 代数については３つの異なった方法をかいたが充分ではなかった．Clifford 代数の数学的理論とその物理への応用だけの成書が必要であることを痛感したのである．

記　号　表

$m_\lambda(\mu)$	$=\dim V(\lambda)_\mu$ （しばしば $m(\mu)$ ともかく）	153
C	Casimir 元	154
$\boldsymbol{Z}[\Lambda]$	$n_1e(\mu_1)+\cdots+n_ke(\mu_k)$ の全体	160
$\mathrm{ch}_{V(\lambda)}$	$=\sum_{\mu\in\Pi(\lambda)} m_\lambda(\mu)e(\mu)$	161
ch_λ	$=\mathrm{ch}_{V(\lambda)}$	161
$f*g$	$(f*g)(\lambda)=\sum_{\mu+\nu=\lambda} f(\mu)g(\nu)$	164
p	Kostant の関数	165
q	Weyl の関数	165
$O(n,\boldsymbol{C})$	n 次複素直交群	183
$\mathfrak{o}(n,\boldsymbol{C})$	$O(n,\boldsymbol{C})$ のリー代数	183
$SO(n,\boldsymbol{C})$	$O(n,\boldsymbol{C})\cap SL(n,\boldsymbol{C})$	184
$\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C})$	$SO(n,\boldsymbol{C})$ のリー代数	184
$O(f)$	$\{g\in\mathrm{Aut}\ V \mid$ すべての $x,y\in V$ について $f(gx,gy)=f(x,y)\}$	186
$\mathfrak{o}(f)$	$O(f)$ のリー代数	186
$\mathcal{C}$	Clifford 代数を表す	195–246
$\Lambda(V)$	V の上の外積代数	197
$\wedge$	外積代数の積	198
$\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$	次数つきテンソル積	214
$\mathcal{C}^+$	$\mathcal{C}$ の偶な元の全体	213
$\mathcal{C}^\times$	$\mathcal{C}$ の逆元をもつ元の全体	217
$\boldsymbol{C}^\times$	$\boldsymbol{C}-\{0\}$	218
center $\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$ の中心	219
$(\text{center }\mathcal{C})^\times$	center $\mathcal{C}$ の元で逆元があるもの	219
$N(x)$	x のスピンノルム	220
$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$	Pauli のスピン行列	234
$Sp(2l,\boldsymbol{C})$	$2l$ 次複素斜交群	255
$\mathfrak{sp}(2l,\boldsymbol{C})$	$Sp(2l,\boldsymbol{C})$ のリー代数	255
ε_{ijk}	Levi-Civita の記号	282
$\{A,B\}$	$=AB+BA$	286
$\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3,\gamma^5$	Dirac 行列	286
C	荷電共役演算子	287
$\lambda_1,\cdots,\lambda_8$	Gell Man 行列	287
$e^-,\mu^-,\tau^-,\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$	レプトン	307

索　　引

ア　イ　ウ

エ　オ

カ

キ

ク

ケ

コ

シ

ス

セ ソ

タ

チ

テ

ト

ナ ネ ノ

ハ

ヒ

フ

ヘ　ホ

ミ　ヤ　ユ

ラ　リ

ル　レ

ワ

山口久典

著者略歴

1926年石川県に生まれる．1947年東京大学理学部数学科卒業．東京大学教養学部講師，東京教育大学助教授を経て，1962年東京教育大学教授，1966年イリノイ大学教授となり現在に至る．その間1959年—60年，66年—68年，71年—72年プリンストン高級研究所所員となる．

主な著書：Introduction to axiomatic set theory (with Zaring, Springer-Verlag, 1971); Axiomatic set theory (with Zaring, Springer-Verlag, 1973); Proof theory (North Holland, 1975); Two Applications of Logic to Mathematics (Iwanami & Princeton University Press, 1978); 数学基礎論（八杉満利子氏と共著，共立出版，1974）; 現代集合論入門（日本評論社，1971）; 層・圏・トポス（日本評論社，1978）; 直観主義的集合論（紀伊国屋書店，1980）; 線形代数と量子力学（裳華房，1981）．

リー代数と素粒子論　　定価 3400 円

昭和58年11月25日　第1版印刷
昭和58年11月30日　第1版発行 ©

著作者の了解により検印を省略いたします

著作者　竹内外史
発行者　吉野達治
発行所　東京都千代田区四番町8番地
電話　東京　262—9166～9
株式会社　裳華房
印刷所　政弘印刷株式会社
製本所　牧製本印刷株式会社

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 4-7853-1038-3

Printed in Japan